2021 春近世代数(H)期末

授课教师：陈小伍 考试时间：2 小时

一、考虑群A_4在(123)上的共轭作用，记C为其轨道

(1)求(123)的稳定化子及$|C|$；

(2)求C。此作用在C上是否忠实？

(3)记$Hom(A_4, S_3)$为$A_4 \to S_3$所有所有同态，求$|Hom(A_4, S_3)|$;

(4)是否存在群的单同态$A_4 \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C})$?是否存在单同态$A_4 \hookrightarrow GL(2, \mathbb{C})$?

二、考虑域$E = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{2}, i\right)$和$K = E \cap \mathbb{R}$.

(1)多项式$x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$是否可约? $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}(i)[x]$是否可约?

(2)求域扩张维数$\dim_{\mathbb{Q}} E$和$\dim_{\mathrm{K}} E$;

(3)$Gal(E/\mathbb{Q})$在集合

$$\mathfrak{X} = \left\{a = \sqrt[4]{2}, b = i\sqrt[4]{2}, c = -\sqrt[4]{2}, d = -i\sqrt[4]{2}\right\}$$

有一自然作用，引起同态$\rho: Gal(E/\mathbb{Q}) \to S(\mathfrak{X})$，求$\rho$的核与像;

(4)求$Gal(E/\mathbb{Q}(i))$和$Gal(E/K)$在下的像.

三.考虑$E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$，求所有的$u \in E$，使得$E = \mathbb{Q}(u)$.(提示：求$E$的线性基和所有域扩张的中间域).

四.考虑$A = \mathbb{Q}^* \backslash \{1\}$和$A$上的双射$\sigma(a) = \frac{1}{a}, \tau(a) = \frac{1}{1-a}$.设$G$为由$\sigma$和$\tau$生成的群，乘法为映射的复合。问$G$是否有限？若$G$有限，求$G$的阶数.