2021 年秋季学期高等概率论（统计系）期末考试

授课教师：胡治水　录入：鲍泽宇

2022 年元月 10 日

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间，证明 $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ 也构成一个可测空间。其中 $\Omega_0 = \Omega \cup \{\Delta\}$，$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{A \cup \{\Delta\} : A \in \mathcal{F}\}$

2. 设 X, Y 为相互独立的标准正态随机变量，证明：(1):$X+Y$ 与 $X-Y$ 独立 (2): 计算 $E(X|X+Y), E(X|X-Y)$

3.(1) 证明：$E(X-a)^2 \geq E(E(X|\mathcal{F})-a)^2 \geq (E(X)-a)^2$，$a \in \mathbb{R}$

(2) 证明：$E(X_I|S_n)$=$\frac{1}{n}S_n$, 其中 $S_n = X_1 + ... + X_n$, I 为 $\{1, ..., n\}$ 的均匀分布，I 与 $X_i, i = 1, 2, ..., n$ 独立。

4.(1) 比较 $\sum_{i=1}^{n} EXI(X>n)$ 和 $E(X^2)$ 的大小

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EI(X<n)$

5. 设 $X_1, ..., X_n$ 为一列独立同随机变量，$EX_1 = 0$,$E(X_1^2) = 1$, 记

$$S_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j$$

证明 (1):$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{p} 0$

(2):a 给定且 $0 < a < 1$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > na)$

6. 设 $X_1, ..., X_n$ 为一列独立的随机变量，且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, ..., n$。$0 < p < 1$，试寻找合适的 a, b, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} bn^a E(p^{X_1+...+X_n}) = 1$

7. 设随机变量 X 有绝对连续的密度函数，随机变量 Y 与 X 独立且恒正，试问 XY 是否有绝对连续的密度函数。