2021年中国科学技术大学新生入学考试

数学学科

2021年8月28日　15:00-17:00

一、填空题(40分)

1. 函数$f(x)=||x-20|-21|$的单调递增区间是_____.

2. 定义函数列$\{f_n\}$为：$f_1(x)=\dfrac{x\cos\theta-\sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}$, 对任意$n\in\mathbb{N}^*$有$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$, 其中$\theta$是常数，则$f_{2021}(x)=$_____.

3. 不等式组$\begin{cases}|x+y|\le & 1\\ x^2+y^2\le & 2\end{cases}$表示的平面区域的面积为_____.

4. 设向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$满足$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1$, 则$|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2$的最大值为_____.

5. 设动点A,B,C按逆时针排列, A,B分别在x,y轴上, $AB=5, AC=4, BC=3$, 则C的轨迹方程是_____.

6. 双曲线$(x+1)(y-2)=3$的距离原点最近的准线方程是_____.

7. 计算$\sum\limits_{k=0}^{1010}(-1)^kC_{2021}^{2k}=$_____.

8. 随机选取$\{1,2,3,4,5,6\}$的三元子集$\{a,b,c\}$.则abc的数学期望是_____.

二、解答题(60分)

9.(20分) 设正四棱锥$P\text{-}ABCD$的所有棱长都是2, E,F,G分别是棱AD,CD,BP的中点, $P\text{-}ABCD$被平面EFG分成两部分, 求其中棱锥部分的体积.

10.(15分) 求所有实数a,b使得在直线$y=b$上且满足$|PF_1|\cdot|PF_2|=1$的点P恰有2个，其中$F_{1,2}=(\pm a,0)$.

11.(15分) 证明：对任意复数a,b,c, 存在复数z满足$|z|=1$且$|(z-a)(z-b)(z-c)|\ge 1+|abc|$.

12.(10分) 设$a_1\cdots,a_n$是两两不同的实数, $n:=2021$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\dfrac{a_i+a_j}{a_i-a_j}=1$.

参考解答

1. 函数$f(x)=||x-20|-21|$的单调递增区间是$\underline{[-1,20]\text{和}[41,+\infty)}$.

2. 定义函数列$\{f_n\}$为：$f_1(x)=\dfrac{x\cos\theta-\sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}$, 对任意$n\in\mathbb{N}^*$有$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$, 其中$\theta$是常数，则$f_{2021}(x)=\underline{\dfrac{x\cos 2021\theta-\sin 2021\theta}{x\sin 2021\theta+\cos 2021\theta}}$.

3. 不等式组$\begin{cases}|x+y|\le & 1\\ x^2+y^2\le & 2\end{cases}$表示的平面区域的面积为$\underline{\dfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3}}$.

4. 设向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$满足$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1$, 则$|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2$的最大值为$\underline{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$.

5. 设动点A,B,C按逆时针排列, A,B分别在x,y轴上, $AB=5, AC=4, BC=3$, 则C的轨迹方程是$\underline{4x+3y=0}$.

6. 双曲线$(x+1)(y-2)=3$的距离原点最近的准线方程是$\underline{x+y=1-\sqrt{6}}$.

7. 计算$\sum_{k=0}^{1010}(-1)^k C_{2021}^{2k}=\underline{-2^{1010}}$.

8. 随机选取$\{1,2,3,4,5,6\}$的三元子集$\{a,b,c\}$.则abc的数学期望是$\underline{\dfrac{147}{4}}$.

9.(20分) 设正四棱锥P-$ABCD$的所有棱长都是2, E,F,G分别是棱AD,CD,BP的中点, P-$ABCD$被平面EFG分成两部分, 求其中棱锥部分的体积.

解：建立空间直角坐标系，设$A(-1,1,0),B(1,1,0),C(1,-1,0),D(-1,-1,0),P(0,0,\sqrt{2})$, 则有$E(-1,0,0),F(0,-1,0),G(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$. 此时可计算得平面$EFG$的法向量为$n=(-1,-1,2\sqrt{2})$, 从而该平面与平面$ABCD$夹角为$\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

下面假设平面EFG交PA,PC于点$I(-t,t,(1-t)\sqrt{2})$, $J(t,-t,(1-t)\sqrt{2})$. 由于$\vec{EI}\perp n$, 计算可得$t=\dfrac{3}{4}$. 进而点I,J,G在平面$ABCD$上的投影分别为$I'(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},0),J'(\frac{3}{4},-\frac{3}{4},0),G'(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. 可以计算出$S_{EFJGI}=\sqrt{5}$, 而$P$到平面$EFG$的距离是$h=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, 所以$V_{P\text{-}EFJGI}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 最后, $V_{P\text{-}DEF}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 从而所求体积为$V_{P\text{-}EDFJGI}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

10.(15分) 求所有实数a,b使得在直线$y=b$上且满足$|PF_1|\cdot|PF_2|=1$的点P恰有2个，其中$F_{1,2}=(\pm a,0)$.

解：设$P(x,b)$. 据条件有$1=((x+a)^2+b^2)((x-a)^2+b^2)$, 等式右边定义为$f(x)$. 求导可得$f'(x)=4x(x^2-a^2+b^2)$. 若$a^2\le b^2$, 则$f$在$\mathbb{R}_-$上单调递减, 在$\mathbb{R}_-$上单调递增. $f(x)=1$有两个解当且仅当$f(0)=a^2+b^2<1$. 若$a^2>b^2$, 此时设$c=\sqrt{a^2-b^2}$, 则f在$(-\infty,-c)$和$(0,c)$单调递减, $(-c,0),(c,+\infty)$单调递增, $f(\pm c)=4a^2b^2$, 所以$f(x)=1$有两解当且仅当$f(0)<1$或$f(c)=1$. 这样，a,b要满足的条件为$a^2+b^2<1$或者“$|ab|=\dfrac{1}{2}$且$|a|>|b|$”.

11.(15分) 证明：对任意复数a,b,c, 存在复数z满足$|z|=1$且$|(z-a)(z-b)(z-c)|\ge 1+|abc|$.

证明：设$f(z)=(z-a)(z-b)(z-c)$. 当$abc=0$时, 据韦达定理容易得知$z^3=1$的三根z_1,z_2,z_3满足$\max 1\le i\le 3|f(z_i)|\ge 1$. 若$abc\ne 0$, 考虑方程$z^3=-\dfrac{abc}{|abc|}$的三根$z_1,z_2,z_3$. 首先，三个根的模长都是1，其次根据韦达定理，其求和和平方和均为0，这样可以算出$f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)=-3abc\left(1+\dfrac{1}{|abc|}\right)$, 其模长为$3(1+|abc|)>3$, 所以必有某个$i\in\{1,2,3\}$使得$|f(z_i)|\ge 1$.

12.(10分) 设$a_1\cdots,a_n$是两两不同的实数, $n:=2021$, 证明: $\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\ne i}^{n}\dfrac{a_i+a_j}{a_i-a_j}=1$.

证明：设所求式子为S. 考虑函数$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(x+a_i)$ 和 $G(x)=\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\prod_{j\ne i}^{n}\dfrac{x-a_j}{a_i-a_j}$. 则可以发现$G(0)=2a_1\cdots a_n\cdot S$. 另一方面，据拉格朗日多项式插值，知道$g(x)=f(x)+f(-x),g(0)=2a_1\cdots a_n$. 所以$S=1$.