1. (总 8 分) 试列表判断如下几类过程是否具有独立增量性、平稳增量性、Markov 性质：(1) 齐次 Poisson 过程; (2) 非齐次 Poisson 过程; (3) 标准更新过程; (4) 布朗运动.

2. (总 12 分, 每小题 4 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是以独立同分布的随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为间隔的更新过程，其中 $\mathsf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathsf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$, 其中 $o < p < 1$.

(1) 求于时刻 0 点发生的更新个数随机变量 $N(0)$ 的概率分布；

(2) 求于时刻 2 点发生的更新个数随机变量的概率分布;

(3) 求 $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}[N(t)]/t$.

3. (总 20 分, 每小题 10 分) 连续抛掷一枚非均匀硬币，每次抛出正面的概率为 $p \in (0,1)$, 抛出反面的概率为 $q = 1 - p$.

(1) 求直到出现花样“正、反、正、反、正、反、正”时抛掷次数的期望.

(2) 求直到抛出上述花样时抛出正面的期望次数.

4. (总 24 分，每小题 6 分) 设 A、B 两盒中共装有 N 个编号分别为 1、2、$\cdots$、N 的小球. 考虑如下试验: 先从 N 个小球中随机地取出一个小球 (每球被取出的概率等可能), 再任意指定一个盒子 (A 盒被指定的概率为 p, B 盒被指定的概率为 $q = 1 - p$), 然后把所取出的小球放入指定的盒子中. 如此不停地重复试验. 记 X_n 为 n 次试验后 A 盒中小球的个数, X_0 表示试验之前 A 盒中小球的个数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 构成一个 Markov 链。

(1) 求该 Markov 链转移概率矩阵 $\mathbf{P}$;

(2) 试判断此链是否可约？每个状态是否具有常返性？每个状态是否有周期? (其中假定 $0 < p < 1$)

(3) 当 $N = 3$, $p = 1/2$ 时, 试求该 Markov 链的平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$;

(4) 记 $\mathbf{P}^{(n)}$ 为该 Markov 链的 n 步转移概率矩阵. 当 $N = 3$, $p = 1/2$ 时, 求 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(n)}$, 并对结果做出解释.

5. （总 24 分，前两小题各 10 分，第 3 小题 4 分） 一个修理工照看机器 1 和机器 2. 每次修复后，机器 i 保持正常运行，运行时间服从参数 (失效率) λ_i 的指数分布, $i=1,2$. 当机器 i 失效时，需要进行修理，修理时间服从参数 μ_i 的指数分布. 机器 1 的修理具有优先权, 在机器 1 失效时总是先修理它. 例如，若正在修理机器 2 时机器 1 突然失效, 则修理工将立刻停止修理机器 2，而开始修理机器 1.

(1) 为该题建立有限状态的连续时间 Markov 链，写成相应的转移强调 Q 矩阵；

(2) 设 $\lambda_i = \mu_i = 1+i$, $i=1,2$. 若系统长时间运行下去, 求机器 2 失效的时间占比；

(3) 每当两台机器同时处于失效状态时，求同时处于失效状态持续的时长分布.

解: (1) 考虑如下状态“(x,y)”, $x,y\in\{0,1\}$, “0”表示失效状态, “1”表示工作状态. 这样一共有如下四个状态：$(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ 和 $(0,0)$, 为简化分别记为状态 0, 1, 2, 3. 构造 4 状态的连续时间 Markove 链 $\{X(t),t\geq 0\}$, 其中 $X(t)$ 表示时刻 t 系统两个机器所处的状态. 相应的转移率矩阵为

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_2-\mu_1 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 \end{bmatrix},$$

稳态分布 (P_0,P_1,P_2,P_3) 满足

$$(P_0,P_1,P_2,P_3)=(P_0,P_1,P_2,P_3)\cdot\mathbf{Q},$$

6. (总 12 分，每小题 6 分) 设 $\{B(t),t\geq 0\}$ 是一个标准布朗运动, 定义随机变量序列 $X_n=B^2(n)-n$, $n\geq 1$.

(1) 证明 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为一个鞅;

(2) 求如下的概率

$$\mathsf{P}\left(\max_{0\leq s\leq n} B(s)\geq u_{0.05}\sqrt{n}\right),$$