

自主测试 2021

群青启林

2021 年 6 月 12 日

2021.1. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 且 $x^4 - (4a - 50)x^2 + a^2 = 0$ 的 4 个解成等差数列, 则 a 为_____。

75/11应该舍掉
这个答案不对

解. $a = 75$ 或 $\frac{75}{11}$ 。

易转化为 $t^2 - (4a - 50)t + a^2 = 0$ 的两个解 t_1, t_2 满足 $t_2 = 9t_1$, 这
等价于 $\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_2} = 9 + \frac{1}{9}$, 利用韦达定理转化如下: $\frac{(4a-50)^2}{a^2} - 2 = 9 + \frac{1}{9}$
解得 $a = 75$ 或 $\frac{75}{11}$ 。注意不需要检验原方程判别式。

2021.2. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 1, 则四面体 ACB_1D_1 与
四面体 BDA_1C_1 的公共部分体积为_____。

解. $\frac{1}{6}$ 。

公共部分即长方体的常规嵌入八面体。

2021.3. 已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与曲线 $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ 相切, 则 $a + b$ 的最小值
为_____。

解. 9。

设切点 $(t, \frac{4}{\sqrt{t}})$, 则切线 $y = \frac{-2}{\sqrt{t}^3}(x - t) + \frac{4}{\sqrt{t}}$, 所求表达式为横纵截距
之和 $3t + \frac{6}{\sqrt{t}} \geq 9$ 。

2021.4. 已知 $x^2 + y^2 = x^2 + z^2 + \sqrt{3}xz = z^2 + y^2 + yz = 16$, 则
 $2xy + xz + \sqrt{3}yz$ 为_____。

解. $4\sqrt{3}$ 。

显然考虑数形结合, 平面上以 x, y, z 为有向长度, 构造 $OA, OB,$
 OC 使得 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle AOC = \frac{5\pi}{6}, \angle BOC = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 为边
长 4 的等边三角形, 所求即 $S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} = S_{ABC} = 4\sqrt{3}$ 。

2021.5. 已知一个小球在 $0, 1, 2, \dots, n$ 这 $n+1$ 个位置上游走, 小球初始位置在 0 处, 每步等可能地向前或者向后移动一个单位, 但是在 0 处只能向前移动, 在 n 处只能向后移动, 则小球首次到达 n 所用的平均步数为_____。

解. n^2 。

这是一个带两侧壁的简单随机游走问题, 求从 0 到 n 的首达时的期望。我们作反射处理, 转化为 $-n$ 到 n 上的带两侧吸收壁的简单随机游走问题, 求 0 处的吸收时间的期望。递推处理, 设 k 处的吸收时间的期望为 E_k , 则由一步转移法得

$E_k = \frac{1}{2}(E_{k-1} + 1) + \frac{1}{2}(E_{k+1} + 1), -n < k < n, E_{-n} = E_n = 0$ 。由特征根理论易得 $E_k = -k^2 + Ak + B$, 待定系数知 $E_k = -k^2 + n^2$, 所求即 $E_0 = n^2$ 。

2021.6. 已知 $\triangle ABC$ 的内角为 A, B, C , 证明:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \cos B + \sqrt{3} \cos C \leq 2.$$

证明. 利用三角形不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos A + 2yz \cos B + 2zx \cos C, \text{ 取}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 1 \text{ 即证!} \quad \square$$

2021.7. 已知函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x+y) = f(x) \cos y + f(y) f(\frac{\pi}{2} - x)$, 求所有可能的 f 。

解. $f(x) = 0$ 或 $f(x) = \sin x$ 。

赋值法: 取 $y = 0$, 得 $0 = f(0) f(\frac{\pi}{2})$ 。在原式中再令 $x = 0$, 得 $f(y) = f(y) f(\frac{\pi}{2})$ 。

若 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 则 $f(y) = 0$, 即 $f(x) = 0$, f 恒为 0 。

若 $f(x)$ 不恒为 0 , 则 $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ 且 $f(0) = 0$,

在原式中再令 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $f(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y$, 即 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} - x = \sin x$

综上并检验得 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = \sin x$ 。

2021.8. 已知 $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_n(x) = \frac{g_{n-1}^2(x) - 2^{n-1}}{g_{n-2}(x)} n \geq 2$, 证明: $g_n(x)$ 是 n 次整系数多项式, 并求 $g_n(x)$ 的全部零点。

证明. 计算并变换指标, 递推式转化为

$$g_{n+2}(x)g_n(x) - g_{n+1}^2(x) = 2^n(g_2(x)g_0(x) - g_1^2(x)),$$

利用二阶递推定理有 $q = 2, p = -x$, 得

$$g_{n+2}(x) - xg_{n+1}(x) + 2g_n(x) = 0, \text{ 即 } g_{n+2}(x) = xg_{n+1}(x) - 2g_n(x),$$

归纳易得 $g_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次整系数多项式。

作为切比雪夫多项式类型的问题, 下面可以利用特征根理论求 $g_n(x)$ 的表达式, 再利用复数换元求 $g_n(x)$ 的全部零点; 也可将上述过程简化改写为用三角换元求解。

$$\text{用三角换元: 改写递推式有: } \frac{g_{n+2}(x)}{\sqrt{2^{n+2}}} + \frac{g_n(x)}{\sqrt{2^n}} = 2 \frac{x}{2\sqrt{2}} \frac{g_{n+1}(x)}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$\text{考虑到 } \sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta \sin n\theta, \text{ 令 } x = 2\sqrt{2} \cos\theta,$$

$$\text{又 } \frac{g_0(x)}{\sqrt{2^0}} = 1 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}, \frac{g_1(x)}{\sqrt{2^1}} = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$$

$$\text{令 } h_{n+1}(x) = \frac{g_n(x)}{\sqrt{2^n}} \sin\theta, \text{ 有 } h_{n+1}(x) + h_{n-1}(x) = 2\cos\theta h_n(x),$$

$$h_1(x) = \sin\theta, h_2(x) = \sin 2\theta$$

$$\text{归纳易证 } h_n(x) = \sin n\theta, g_n(x) = \sqrt{2^n} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

上述为形式推导, 当 $\sin\theta = 0$ 时, 直接计算或者利用极限与连续性有 $g_n(x) = (n+1)\sqrt{2^n}$,

现在 $g_n(x) = 0$ 等价于 $\sin(n+1)\theta = 0$ 且 $\sin\theta \neq 0$, 所以

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 从而 } x = 2\sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n \text{ 为 } g_n(x) \text{ 的全部零点.} \quad \square$$

2021.9. 对实数 x 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$, 已知 $a \in \mathbb{R}$, 证明:

$$a \text{ 为无理数当且仅当 } \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ s.t. } 0 < \{na\} < \frac{1}{m}.$$

证明. 本题考查与 Dirichlet 逼近定理有关的结论。

必要性: 反证法: 若 a 不为无理数, 则设 $a = \frac{q}{p}$,

$p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, p > 0, \gcd(p, q) = 1$, 于是取 $m = p + 1$, 设

$$nq = kp + r, k, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < p, \text{ 有 } \{na\} = \frac{r}{p} \notin (0, \frac{1}{m}).$$

充分性: 给定 $a \in \mathbb{R}$, 由 Dirichlet 逼近定理, 知

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists n, l \in \mathbb{Z}, 0 < n \leq m, \text{ s.t. } |na - l| < \frac{1}{m}$$

显然 $\{na\} = |na - l|$, 而 a 为无理数, 所以 $na - l \neq 0$, 从而

$$0 < \{na\} < \frac{1}{m}.$$

Dirichlet 逼近定理可由抽屉原理证明, 此处从略。 \square