微分方程II第二次阶段测验

考试时间：2021年6月2日19:00—21:30

除特别说明外，试卷中的U均为$\mathbb{R}^n$中的有界开集，$\partial U \in C^\infty$.

1.(10分)设$f \in L^2(U)$.试给出如下边值问题弱解$u \in H^1(U)$的定义，并证明弱解的存在性和唯一性.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ U \\ u + 2\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & on\ \partial U \end{cases}$$

2.(20分)设$U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

(1)(6分)方程

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U \end{cases}$$

在λ取何值时有非零解？计算此时的λ及对应的解u.

(2)(6分)证明：方程

$$\begin{cases} \Delta u + \dfrac{5}{4}u = ax + by + c & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U \end{cases}$$

存在弱解$u \in H_0^1(U)$的充分必要条件是$a = b = 0$.

(3)(8分)用Lax-Milgram定理证明

$$\begin{cases} \Delta u + \dfrac{1}{4}u = x^2 + y^2 & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U \end{cases}$$

存在唯一弱解$u \in H_0^1(U)$，并证明$\displaystyle\int_U u^2 dx \le \frac{128\pi^2}{3}$.

3.(20分)设$u \in C^2(U)$为方程

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0 \ \ in \ \ U$$

的解，且$u > 0$，L的系数满足$a^{ij} = a^{ji}$，$a^{ij}, b^i \in C^1(U)(i, j = 1 \ldots n)$，存在常数$\lambda > 0$，$\Lambda > 0$使得对于几乎处处的$x \in U$，$\xi \in \mathbb{R}^n$，$\lambda |\xi|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda |\xi|^2$.证明：对于任意$V \subset\subset U$，存在$C > 0$使得

$$\sup_V u \le C \inf_V u,$$

其中C仅依赖于V和L的系数.

4.(30分)设$u \in H_0^1(U)$为边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\sum\limits_{i,j=1}^n \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} = f & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U \end{cases}$$

的弱解，L的系数满足$a^{ij} = a^{ji}$，$a^{ij} \in C^1(\overline{U})(i, j = 1 \ldots n)$，存在常数$\lambda > 0$，$\Lambda > 0$使得对于几乎处处的$x \in U$，$\xi \in \mathbb{R}^n$，$\lambda |\xi|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda |\xi|^2$，$f \in L^2(U)$.证明：$u \in H^2(U)$，且成立

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

其中C仅依赖于U和L的系数.

5.(20分)设$f \in L^2(U)$.对于$\varepsilon > 0$，记$u_\varepsilon \in H_0^1(U)$为方程

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \ in\ U$$

的弱解。证明：$u_\varepsilon \to f \ in\ L^2(U)$.