授课教师：麻希南

微分方程II期末考试

考试时间：2021年7月3日14:30—17:00

除特别说明外，试卷中的U均为$\mathbb{R}^n$中的有界区域，$\partial U \in C^\infty$.对于给定的$T>0$，$U_T = U \times (0,T]$.

1.(15分)设$u \in C_1^2(U_T)$为方程

$$u_t - \Delta u = 0 \quad in \quad U_T$$

的解，$u > 0$ in U_T.设$V \subset\subset U$连通，证明：对于任意$0 < t_1 < t_2 \le T$，存在常数C，使得

$$\sup_V u(\cdot, t_1) \le C \inf_V u(\cdot, t_2),$$

其中C仅依赖于n, V, t_1, t_2.

2.(15分)给定$0 < \rho < R$，设$u \in C_1^2(K_{R+\rho}) \cap C(\overline{K_{R+\rho}})$满足方程

$$u_t - \Delta u = 0 \quad in \quad K_{R+\rho},$$

其中$K_R := \{(x,t) : |x|^2 + |t| < R^2, t < 0\}$，证明

$$\sup_{K_R} |\nabla u| \le \frac{C}{\rho} \sup_{K_{R+\rho}} |u|,$$

其中C仅依赖于n, R.（提示：考虑辅助函数$\varphi = [(R+\rho)^2 - |x|^2 + t]^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2$）

3.(10分)设$u(x,t)$是$[0,2] \times \overline{\mathbb{R}}_+$中初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x|_{x=0} = 1, u_x|_{x=2} = 13 \\ u|_{t=0} = x^3 + x \end{cases}$$

的解.问：$\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$是否存在？若是请求出，否则说明理由.

4.(25分)设$u \in C_2^3(U_T) \cap C(\overline{U_T})$满足方程

$$\begin{cases} u_t - \sum\limits_{i,j=1}^n \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} = f & in \quad U_T \\ u = 0 & on \quad \partial U \times [0,T] \\ u = g & on \quad U \times \{t=0\} \end{cases}$$

其中$a^{ij}, f \in C^\infty(\overline{U_T}), g \in C^\infty(U), a^{ij} = a^{ji}$，存在常数$0 < \lambda \le \Lambda < +\infty$使得对于几乎处处的$(x,t) \in U_T$，$\xi \in \mathbb{R}^n$，$\lambda |\xi|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \le \Lambda |\xi|^2$，证明：

(1)$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)})$,

(2)$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)})$,

(3)$\|\mathbf{u}'\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)})$, 其中$C$仅依赖于$U, T$及$L$的系数.

5.(15分)设u为方程$u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$的光滑解，其中$a^{ij} := a^{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.取$q$为满足方程

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij} q_{x_i} q_{x_j} = 1, q > 0 & in \quad \mathbb{R}^n - \{x_0\} \\ q(x_0) = 0 \end{cases}$$

的光滑解，定义特征锥$K := \{(x,t) : q(x) < t_0 - t\}$，$K_t := \{x | q(x) < t_0 - t\}$.证明：若$u \equiv u_t \equiv 0$ on K_0，则$u \equiv 0$ in K.

6.(10分)设$u(x,t)$是$[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}_+$中初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=x^2(1-x) \end{cases}$$

的解.求$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^1\left[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right]dx$.

7.(10分)设$U=B_1^2(0)$，$u(x,y)$是方程

$$\begin{cases} \Delta u=xy & in\ \ U \\ u=0 & on\ \ \partial U \end{cases}$$

的解，求$u(0,0)$.

8.(10分)设$u\in C^2(U)\cap C^0(\overline{U})$满足方程

$$\begin{cases} \Delta u=f & in\ \ U \\ u=g & on\ \ \partial U \end{cases},$$

其中$f,g\in C^0(\overline{U})$，证明：$\|u\|_{L^\infty(\overline{U})}\le C(\|f\|_{L^\infty(\overline{U})}+\|g\|_{L^\infty(\partial U)})$，其中$C$仅依赖于$diam(U)$.

9.(10分)设$\cancel{U}$ $\mathbb{R}^n$为有界凸区域，证明：方程

$$\begin{cases} \Delta u+u^{\cancel{\frac{n+2}{n-2}}\ \frac{n}{n-2}}=0 & in\ \ U \\ u=0 & on\ \ \partial U \end{cases}$$

的正解$u\in C^\infty(U)$不存在.