# 《数学分析 A2》第二次单元测

姓名　　　　　学号　　　　　成绩

2021 年 6 月 6 日

1. 计算下列积分 (每题 10 分, 共 40 分):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$;

   (b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} xy^2dxdy$, 其中常数 $a>0$;

   (c) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 $\Omega$ 为平面 $z=0$, $y=0$, $z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体;

   (d) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos x\, dxdydz$.

2. 证明:(10 分)
$$1 \leqslant \iint\limits_{[0,1]^2} (\sin x^2+\cos y^2)dxdy \leqslant \sqrt{2}.$$

3. 计算由 $(x^2+y^2+z^2)^{2021}=z^{4041}$ 围成的区域的体积, 结果中的大整数乘积不必算出。(15 分)

4. 计算下列 $n$ 重积分 (15 分)
$$\int\cdots\int\limits_{\Omega} \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$
   其中

   $\Omega=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,2,\ldots,n\}$.

5. 设函数 $f(x,y)$ 定义在有界矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上。对于任意 $x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 关于 $y$ 在 $[c,d]$ 上为单调增函数，对于任意 $y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 关于 $x$ 在 $[a,b]$ 上为单调增函数，证明 $f$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的间断点全体是二维零测集。(10 分)

6. 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域，其面积为 $\mu$. $u(x,y)>0$ 在 $D$ 上连续，其最大值和最小值分别为 $M$ 和 $m$. 定义

$$f_p(u)=\left(\frac{1}{\mu}\iint\limits_D u^p(x,y)dxdy\right)^{1/p},$$

证明：(10 分)

(a) $\lim\limits_{p\to+\infty} f_p(u)=M$, $\lim\limits_{p\to-\infty} f_p(u)=m$;

(b) $\lim\limits_{p\to 0} f_p(u)=\exp\left(\frac{1}{\mu}\iint\limits_D \ln u(x,y)dxdy\right)$.