线性代数 B2 21 年期末解析

一．填空

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$．则 A 的 Jordan 标准形是________，A 的最小多项式是________，A 的奇异值是___________．$\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}: x\to Ax$的二维不变子空间为_________

解：diag　$(J_2(1),1)$ ；$1,\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ ；$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$或$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

显然特征值为 $\lambda=1$（三重）

又 $r(A-I)=1$　$r(A-I)^2=0$

$\Rightarrow J=\mathrm{diag}(J_2(1),1)$

由有理标准型知识知道最小多项式为 $d_A(x)=(x-1)^2$

$AA^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　特征值为 $1,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

则奇异值为 $1,\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$\mathcal{A}$的二维不变子空间必然包含其特征子空间，具体证明请仿照 23 年期末第四题（3）

逐个检验二维线性空间就有$\mathcal{A}$的二维不变子空间

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\text{或}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

2．在四维欧式空间$\mathbb{R}^4$中，W 是由 $\alpha_1=(1,0,1,0)$ 与 $\alpha_2=(0,1,0,1)$ 生成的子空间。

向量 $\alpha=(1,1,-1,-1)$ 在 W 中的正交投影向量 β（即满足 $\alpha-\beta\in W^{\perp}$ 且在 W 中的向量 β ）是__________

解：$(0,0,0,0)$

先标准正交化α_1，α_2，注意其已经正交，只需单位化

又注意到α实际上已经正交于α_1，α_2

则$\beta=(0,0,0,0)$

在这里补充不同内积定义下的酉空间上求正交投影的方法：

（1）$(u,v)=u^{*}Gv$ 时，这里G为复正定阵，给定W一组标准正交基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$

对任意 $\alpha\in V,\alpha$ 在 W 上的正交投影存在唯一

且$P\alpha=(\alpha_1,\alpha)\alpha_1+(\alpha_2,\alpha)\alpha_2+\ldots+(\alpha_n,\alpha)\alpha_n$

（2）$(u,v)=uGv^{*}$ 时，这里G为复正定阵，给定W一组标准正交基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$

对任意 $\alpha\in V,\alpha$ 在 W 上的正交投影存在唯一

且$P\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\ldots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$

3．复方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & i\\ 1 & -i & 0\end{pmatrix}$ 的酉相似标准形为__________

解：$\mathrm{diag}(1,1,-2)$

有特征值 $\lambda_1 = 1$（二重）$\lambda_2 =- 2$

又　$\mathrm{r}(A - I) = 1$

$\Rightarrow J = \mathrm{diag}(1,1,-2)$

二. 给定数域 $\mathbb{F}$ 的 n 阶方阵 A ，定义 $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: X \to AX - XA$.

如果 A 可以对角化， $\mathcal{A}$ 是否也可以对角化？请说明理由。

证：可以对角化

A 可以对角化，则存在可逆阵P使得$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

我们考虑构造一组基使得$\mathcal{A}$在这组基下为对角阵，注意一组基经过可逆线性变换之后还是一组基

先取 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 自然基 $E = \left\{E_{ij} | 1 \le i, j \le n\right\}$

构造 $M = \left\{X_{ij} | 1 \le i, j \le n\right\}$ 其中 $X_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(X_{ij}\right) = AX_{ij} - X_{ij}A &= PDP^{-1}PE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}PDP^{-1} \\ &= P\left(DE_{ij} - E_{ij}D\right)P^{-1} = P\left(\lambda_i E_{ij} - E_{ij}\lambda_j\right)P^{-1} \\ &= \left(\lambda_i - \lambda_j\right)X_{ij}\end{aligned}$$

这就说明了$\mathcal{A}$在$M = \left\{X_{ij} | 1 \le i, j \le n\right\}$下的矩阵为对角阵

三. 设 A 为 n 阶复方阵，k 为正整数。用 Jordan 标准形证明：

$$\mathrm{rank}A^k - \mathrm{rank}A^{k+1} \geq \mathrm{rank}A^{k+1} - \mathrm{rank}A^{k+2}$$

证：相似的矩阵秩相同，不妨考虑 Jordan 标准型

首先可逆阵自然满足等号成立（特征值均非零）

或考虑$\lambda \neq 0$ 时有 $r(J(\lambda)) = r\left(J^k(\lambda)\right)$

再考虑特征值为 0 的 Jordan 块：

一阶 Jordan 块有 $J_1^k(0) = J_1(0)$ ，秩不变

$J_n(0) = N_n$ 有性质

$$r\left(N_n^k\right) = \begin{cases} n-k, k < n \\ 0, k \geq n \end{cases}$$

即$r\left(N_n^k\right) - r\left(N_n^{k+1}\right) = \begin{cases} 1, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}$

综合以上结果就有 $\mathrm{rank}A^k - \mathrm{rank}A^{k+1} \geq \mathrm{rank}A^{k+1} - \mathrm{rank}A^{k+2}$

四. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1．求矩阵 A 的正交相似标准形.

2．设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: x \to Ax \in \mathbb{R}^3$ ．证明： $\mathcal{A}$ 是绕过原点的直线 l 的旋转变换，

并求变换的轴 l 及旋转角度 θ

解：1. $\det(A)=1$

有特征值$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i \quad \lambda_3=-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i$

那么其正交相似标准型为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

2. 先给出一般性方法

对三阶正交阵A且 $\det(A)=1$，存在正交阵T使得

$$T^TAT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

即其正交相似标准型为旋转变换

旋转轴为特征值 1 对应特征向量的所在直线

旋转角有 $\cos\theta=\frac{\mathrm{tr}(A)-1}{2}$ （由A与$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$相似立得）

对本题来说

$\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

旋转轴为直线 $l{:}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}t$ 这里$t\in\mathbb{R}$

旋转角为 $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

五. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维欧式空间 V 上的线性变换。证明：

$$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$$

证：本题题目有误，反例可以由 23 年期末第三题给出

如：$\mathcal{A}: x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.\ x \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in ker\mathcal{A}$，因为 $\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

则 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{ker}\mathcal{A}$ 不是直和

六．设 A, B 为同阶实对称方阵，且 $A \geq B \geq 0$（即 $A \geq 0, B \geq 0$ 且 $B - A \geq 0$ ）

证明：$\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$

证：（本题解法来自 wxy 助教习题课讲义）

证法 1：$\sqrt{A} - \sqrt{B}$仍然是对称阵，有正交相似标准型，即存在正交矩阵 P ，使得

$$P^T(\sqrt{A} - \sqrt{B})P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

设 $P^T\sqrt{A}P=\left(a_{ij}\right), P^T\sqrt{B}P=\left(b_{ij}\right)$. 于是

$$a_{ij}=b_{ij}, i\neq j; a_{ii}-b_{ii}=\lambda_i, 1\leq i\leq n$$

设

$$C=\left(c_{ij}\right)=P^T(A-B)P=\left(a_{ij}\right)^2-\left(b_{ij}\right)^2$$

则 $c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2=\lambda_i(a_{ii}+b_{ii})$.

因为 $P^T\sqrt{A}P, P^T\sqrt{B}P\geq 0, C\geq 0$

所以 $a_{ii}, b_{ii}\geq 0, \lambda_i(a_{ii}+b_{ii})\geq 0, 1\leq i\leq n$. 如果 $a_{ii}>0$ ，则有 $\lambda_i\geq 0$ ，否则 $a_{ii}=b_{ii}=\lambda_i=0$.

证法 2：设 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 特征值 λ 的特征向量为 α ，则

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})\alpha=\lambda\alpha$$

即 $\sqrt{A}\alpha=(\sqrt{B}+\lambda I)\alpha, (\sqrt{A}-\lambda I)\alpha=\sqrt{B}\alpha$. 左乘转置就可以得到

$$\begin{aligned}\alpha^T(A-B)\alpha &= 2\lambda\alpha^T\sqrt{B}\alpha+\lambda^2\alpha^T\alpha\\ \alpha^T(A-B)\alpha &= 2\lambda\alpha^T\sqrt{A}\alpha-\lambda^2\alpha^T\alpha\end{aligned}$$

因此有

$$\alpha^T(A-B)\alpha=\lambda\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha$$

如果 $\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha>0$ ，则有 $\lambda\geq 0$. 否则 $\alpha^T\sqrt{A}\alpha=0, \alpha^T\sqrt{B}\alpha=0$. 根据定义也有 $\alpha^TA\alpha=0, \alpha^TB\alpha=0$. 由上式可以得到 $\lambda=0$. 综上所述 $\lambda\geq 0$.

证法 3：设有相合规范型 $P^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})P=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ，

$$P^T\sqrt{A}P=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, P^T\sqrt{B}P=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

则

$$A_1+B_1=I, A_2+B_2=A_3+B_3=O=A_4+B_4$$

因为 A_4, B_4 半正定，所以 $A_4=B_4=O$. 再根据 22-23 期末第五题可以得到，$A_2=A_3=B_2=B_3=O$. 存在 r阶正交矩阵 P_1 ，使得 $P_1^T A_1 P_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ ，取 $P_2=P\mathrm{diag}(P_1, I_{n-r})$ ，有

$$P_2^T\sqrt{A}P_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r,O), P_2^T\sqrt{B}P_2=\mathrm{diag}(1-\lambda_1,\dots,1-\lambda_r,O)$$

所以

$$P_2^T(\sqrt{A}-\sqrt{B})P_2=\mathrm{diag}(2\lambda_1-1,\dots,2\lambda_r-1,O)$$

设 $C=\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ，

$$\begin{aligned} P_2^T(A-B)P_2= &\ P_2^T(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})P_2+P_2^T(\sqrt{B}\sqrt{A}-\sqrt{A}\sqrt{B})P_2 \\ = &\ \mathrm{diag}(2\lambda_1-1,\dots,2\lambda_r-1,O)P_2^{-1}P_2^{-T}\mathrm{diag}(I_r,O) \\ &\ +P_2^T(\sqrt{B}\sqrt{A}-\sqrt{A}\sqrt{B})P_2 \end{aligned}$$

第二个式子是反对称矩阵，所以对角元素为 $0. P_2^{-1}P_2^{-T}$ 是正定矩阵，所以对角元素大于 0 ，根据 $A-B$是半正定的，所以上式对角元素

$$2\lambda_i-1\geq 0$$

因此 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 是半正定矩阵.