每题 20 分. 考试时间: 19:00-21:30

1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$ 满足方程

$$\int_{\Omega} |Du|^{p-2} Du \cdot D\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{1}$$

证明: 若 $p = n$, 则存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $u \in C^{\alpha}(\Omega)$.

2. 设 $B_2 = \{x : |x| < 2\}$, $u \in W^{1,p}(B_2) \cap L^{\infty}_{loc}(B_2)$, $p > 1$ 满足方程

$$\int_{B_2} |Du|^{p-2} Du \cdot D\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(B_2). \tag{2}$$

证明: 若 $1 < p < n$, 则存在常数 $C = C(n,p)$ 使得

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u^+ \le C(\int_{B_1} |u|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 C^1 有界区域. 设 a^{ij} 可测且满足 $[\lambda, \Lambda]$ 一致椭圆条件. 设 $f \in L^q$, $q > \frac{n}{2}$. 设 $u \in W^{1,2}$ 满足方程

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_i u D_j \phi \le \int_{\Omega} f\phi \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \phi \ge 0 \tag{4}$$

证明: 存在常数 $C = C(n, \lambda, \Lambda, \Omega, q)$ 使得

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C(||u||_{L^2} + ||f||_{L^q}) \tag{5}$$

4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界长方体. 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. 设 a^{ij} 是有界可测且处处正定. 设 $D^* = |\det[a^{ij}]|^{\frac{1}{n}}$. 证明:

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C(n) \, |\Omega|^{\frac{1}{n}} \left|\left| \frac{a^{ij} D_{ij} u}{D^*} \right|\right|_{L^n} \tag{6}$$

5. 设 $F \in C(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n)$ 满足一致椭圆条件且 $F(0,x) = 0$. 若 u 是方程 $F(D^2 u, x) = 0$ 的粘性解, $u \ge 0$ 且存在 x_0 使得 $u(x_0) = 0$. 则 $u \equiv 0$.