# 2021 秋微分几何(H)期中

# 授课教师：张希 时间：2 小时

一、（1）设$T: E^3 \to E^3$是合同变换，$\vec{X}, \vec{Y}$是$E^3$中两个向量，求$T\left(\vec{X}\right) \times T(\vec{Y})$和$T(\vec{X} \times \vec{Y})$的关系；

（2）设$C$是$E^3$中的正则曲线，其在合同变换下曲率和挠率如何变化？（20 分）

二、设$E^3$中曲线$C: \boldsymbol{r}(u, v) = (a(1 - \sin u), a(1 - \cos u), bv)$，求$C$的曲率、挠率（10 分）

三、设曲面Σ由$xOz$平面内的曲线$x = \cosh z$绕$z$轴旋转一周而得，求Σ的第一基本形式、第二基本形式、法曲率、Gauss 曲率、平均曲率。(25 分)

四、设Σ是$E^3$中的非脐点曲面

（1）若Σ的 Gauss 映射是保角变换，证明Σ一定是极小曲面；

（2）若Σ的 Gauss 曲率恒为 0，证明Σ局部是可展曲面。(25 分)

五、设$C$是$E^3$中的正则曲线，曲率为$k \neq 0$，挠率为$\tau$

（1）若$C$的法平面过定点，证明$C$是球面曲线；

（2）若$C$使某曲面的曲率线，且其法向是此曲面法向，证明$C$是平面曲线；

（3）若$C$可以与$E^3$中另一曲线建立一一对应，且在对应点处它们有公共的主法线，$\tau \neq 0$，证明存在常数$a, b$，使$ak + b\tau = 1$.(20 分)

提示：最后一问不会的可以搜一搜 Bertrand 伴侣线