2020年春季学期拓扑学(H)期末考试
原卷为英文版

整理人与录入：杨威、章俊彦

主讲教师：王作勤

一、叙述以下定理的内容（20分，每题4分）

1. Brouwer区域不变性(Invariance of Domain)定理
2. 单位分解存在性定理
3. Urysohn 可度量化定理
4. Schauder不动点定理
5. Tietze延拓定理
6. 复叠空间（不含基点）的分类定理

二、判断题（20分，每题2分）

（　）度量空间中任何集合的导集都是闭集；

（　）若$(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$都是Hausdorff空间，则$(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{product})$也是；

（　）局部紧空间的任何子空间都是局部紧的；

（　）若X紧、Y是Hausdorff空间，则任何双射$f: X \to Y$都是同胚；

（　）局部连通空间的任何连通分支都是开的；

（　）任何不是满射的连续映射$f: X \to S^n$都是零伦的；

（　）完备度量空间中任何有界闭集都是紧集；

（　）任何局部欧氏的拓扑空间都是Hausdorff空间；

（　）若M_1, M_2均为可定向的连通紧曲面，则$M_1 \sharp M_2$也是；

（　）若$\tilde{X}$和X同胚，且$p: \tilde{X} \to X$是复叠映射，则p是同胚；

（　）$[0,1) \times (0,1)$和$[0,1) \times [0,1]$是同胚的。

三、填空题（20分）

1. 设X, Y是拓扑空间，我们称$f: X \to Y$连续是指（请写出6个等价定义）

2. 以下哪些性质是所有拓扑流形都满足的？（写对一个得1分，写错一个倒扣1分）

（1）Lindelöf.　（2）第一可数　（3）第二可数　（4）紧　（5）局部紧

（6）序列紧　（7）Hausdorff　（8）正则(regular)　（9）正规(normal)　（10）连通

（11）道路连通　（12）局部道路连通　（13）可缩　（14）单连通　（15）半单连通

（16）可度量化　（17）局部欧氏　（18）仿紧

四、举例子（15分）

1. 紧但不序列紧的拓扑空间
2. 满足第一可数、T2、T4公理但不可度量化的拓扑空间

3. $C([0,1] \to \mathbb{R})$中能分离点但不稠密的子代数

4. 连通但不道路连通的拓扑空间

5. 单连通但不可缩的拓扑空间

6. 欧拉示性数为0但不同胚于$\mathbb{T}^2$的紧曲面。

五、（15分）考虑$\mathbb{Q}$赋予余有限拓扑

$$\mathcal{T} = \{\} \cup \{\mathbb{Q} \setminus A | A\text{是有理数集的有限子集.}\}$$

求证：该拓扑空间是紧的，不是Hausdorff的。它是否连通？请证明你的结论。

六、（15分）设X, Y都是拓扑空间，且Y是Hausdorff空间。

1. 设$f : X \to Y,\ g : X \to Y$军事连续映射。证明：$A := \{x | f(x) \neq g(x)\}$是$X$中的开集，并据此得出若$f, g$在$X$的稠密子集上取值相等，则二者恒等。

2. 设$C(X, Y)$是全体$X \to Y$的连续函数。请写出这上面的紧开拓扑的定义，并证明该空间赋予紧开拓扑是Hausdorff空间。

七、（10分）设有连续映射$f : S^n \to \mathbb{R}^n$，证明f既不是单射又不是满射。

八、（15分）

1. 写出映射提升的定义

2. 设$p : (\tilde{X}, \tilde{x_0})$是复叠映射，$f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$是连续映射。若$Y$是_____和_____的，则$f$的提升映射$\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$存在，当且仅当_____。

3. 设$p : \mathbb{R} \to S^1$是复叠映射$p(x) = e^{ix}$. 问：任一连续映射$f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$能否被提升为连续映射$\tilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$？证明你的结论。

九、（10分）设$X := S^2 \cup \{(0,0,z) | -1 \leq z \leq 1\}$是单位球面$S^2$与连接南北极点的线段的并集。请计算它的基本群。

十、（15分）设(X, d)是道路连通的度量空间。给定任一道路$r : [0,1] \to X$，定义其长度作

$$L(r) = \sup\{\sum_{i=0}^{N} d(r(t_i), r(t_{i+1})) \Big| N \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{N+1} = 1\}.$$

借此我们定义X上的“长度”度量为$d_l(x, y) = \inf\{L(r) : r\text{为x到y的道路}\}$.

现在考虑$X = \mathbb{R}^2$并用极坐标$(\rho, \theta), \rho \geq 0,\ \theta \in S^1$刻画点的坐标。对两点$x_i(\rho_i, \theta_i)$, 定义

$$d_0(x_1, x_2) = |\rho_1 - \rho_2| + \min\{\rho_1, \rho_2\} \cdot \sqrt{d_E(\theta_1, \theta_2)},$$

其中d_E是S^1上赋予二维欧氏距离的度量。现假设我们已经证明d_0是一个度量。

1. 证明：由d_0生成的$\mathbb{R}^2$上的度量拓扑就是欧氏拓扑T_E.

2, 证明：d_0诱导的长度d_l是

$$d_l(x_1, x_2) = \begin{cases} |\rho_1 - \rho_2|, & if\ \theta_1 = \theta_2, \\ \rho_1 + \rho_2, & if\ \theta_1 \neq \theta_2. \end{cases}$$

3. 设T_l为$\mathbb{R}^2$上由d_l生成的度量拓扑。回答并简要解释如下问题：

（1）T_l, T_E哪个拓扑更强？

（2）单位圆圈是否在长度拓扑T_L下是紧集？

（3）$\mathbb{R}^2$赋予长度拓扑T_l是否道路连通？是否局部道路连通？是否可缩？