2020年秋季学期 组合学 期末考试
授课教师：马杰

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [n]$，且 $\forall I \in 2^{[n]}$，$\sum_{i \in I} a_i$ 都不是 $n+1$ 的倍数，证明：$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

2. 设 $A_i \subseteq [n]$，$i = 1, 2, \cdots, N$，且 $\exists t > 0$，s.t. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |A_i| \geqslant \frac{n}{t}$，
当 $N \geqslant 2t^2$ 时，证明：$\exists i \neq j$，s.t.

$$|A_i \cap A_j| \geqslant \frac{n}{2t^2}$$

3. 设 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n} \in R^n$，且 $|\vec{v_i}| \leq 1$，对 $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} p_i \vec{v_i}$，其中 $p_i \in [0,1]$，
证明：$\exists\, \varepsilon_i \in \{0,1\}$，s.t. $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i - w\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$

4.

5. 设 $A \subseteq \{0,1,2\}^n$，对 A 中任两个不同的 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$
$\exists i$，s.t. $a_i - b_i \equiv 1 \mod 3$. 证明：$|A| \leqslant 2^n$

6. 在有限射影平面中，记 (X, C)，一个集合 A 称为 blocking 集，当且仅当 C 中任一条线与 A 有至少一个交点。试证：在一个 order 为 q 的有限射影平面(FPP)中一个大小为 $q+1$ 的集合是 blocking 集当且仅当它是一条线.

附加题：若一个树有 $2k$ 个点的度数是奇数，证明它可以被拆分为 k 个边不交的路的并集。

缺第4题