中国科学技术大学数学科学学院

2019～2020 学年第 2 学期期末考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称　近世代数　　课程编号　001010

考试时间　2020 年 9 月 3 日　　考试形式　闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

授课教师：张磊、申伊塃

一、 (40 分) 完成以下五道小题中的四道题 (请明确标出所选题).

(1) 列出加法循环群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ 的所有的循环群生成元, 并确定其所有的自同构 (解答要求包含分析过程).

(2) 简要描述如何构造一个 9 个元素的域.

(3) 列举 $\mathbb{Z}[x]$ 的所有素理想和所有的极大理想 (不需要分析过程).

(4) 设 R 为一个唯一因子分解整环, 设 $b, c \in R$ 为非零元. (i) 问两个主理想的交 $(b) \cap (c)$ 是否仍是主理想? 若是, 请简要证明; 若否, 请举例. (ii) 问主理想的和 $(b) + (c)$ 是否仍为主理想? 若是, 请简要证明; 若否, 请举例.

(5) 详细陈述佐恩引理 (Zorn's lemma).

二、 (10 分) 计算群 $\langle a, b \mid a^4 = b^7 = 1, ab = ba^3 \rangle$ 的阶数.

三、 (15 分) 设环 $R=\mathbb{Z}[x]$.

(1) 证明: 商环 $R/(x^3+x+1)$ 是整环但不是域.

(2) 证明商环 $R/(x^3+x+1)$ 作为加法群是有限生成的, 并求出它的秩.

四、 (15 分) 设 R 是一个非零的含幺交换环，其中指定的元素 $a \in R$ 满足对任意的正整数 n 皆有 $a^n \neq 0$. 记 $\mathcal{S} = \{a^n\}_{n\geq 0}$, 这儿约定 $a^0 = 1$.

(1) 证明 $\{\, I \text{ 是 } R \text{ 的理想} \mid I \cap \mathcal{S} = \varnothing \,\}$ 中的理想在集合的包含关系下存在最大元.

(2) 证明上述的最大元一定是 R 的素理想.

(3) 求出 α 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上的所有共轭元.

(4) 证明 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦 (Galois) 扩张, 并描述伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$.

五、 (20 分) 设 $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(1) 求解 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式.

(2) 求出 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的所有共轭元.