

2020年春季学期近世代数(H)期末考试

整理与录入: 付杰、杨笑东、叶子恺、章俊彦

2020年8月30日 授课教师: 陈小伍

- 一、考虑 S_4 中的共轭类 $C = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 以及 S_4 在 C 上的共轭作用。
- 1、计算 C 中三个元素的稳定化子及其交集。
 - 2、记 $\text{SHom}(S_4, S_3)$ 为所有 $S_4 \rightarrow S_3$ 的满同态, 计算 $\text{SHom}(S_4, S_3)$ 和 $\text{Hom}(S_4, S_3)$ 的阶数。
 - 3、是否存在单同态: $S_3 \hookrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$, $S_3 \hookrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$? 为什么?
- 二、考虑 $R := \mathbb{Z}[i]$, $K := \mathbb{Q}(i)$
- 1、计算最大公约数 $\gcd(4 + 7i, 3 + 4i)$.
 - 2、把 $81 + 8i$ 分解成 R 中不可约元的乘积。
 - 3、求 $u^2 + v^2 = 585$ 的所有整数解。
 - 4、求 $R/(13)$ 的自同构群。
 - 5、多项式 $x^5 - 5$ 和 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 是否为 K 中的不可约多项式?
 - 6、求 R 的子环, 哪些子环是UFD?
 - 7、设 K' 是 $x^5 - 5$ 在 $\mathbb{Q}(i)$ 上的分裂域。计算 $[K' : K]$, 伽罗瓦群 $\text{Gal}(K'/K)$ 是不是Abel群?
- 三、设 $f(x) = x^4 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$, 考虑 $\mathbb{F}_{81} := \mathbb{F}_3[x]/(f(x))$. 令元素 $u = x + (f(x))$.
- 1、证明 $f(x)$ 在 \mathbb{F}_3 上不可约。
 - 2、在 \mathbb{F}_{81} 中分解 $f(x)$.
 - 3、求 \mathbb{F}_{81} 的9元子域。
 - 4、求 $(1 + u + u^2)^{-1}$.
 - 5、求 $1 + u + u^2$ 在 \mathbb{F}_3 上的最小多项式。
 - 6、求 $1 + u + u^2$ 在 $(\mathbb{F}_{81})^\times$ 中的阶数。