代数学基础期末考试

2021 年 3 月 4 日，星期四，14:30–16:30

姓名：____________ 学号：______________ 所在院系：______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总　分
得分								
复查								

一、(15 分) (1) 求 2021^{2021} 的末三位数字。

(2) 对 2021 的每个素因子 p 找出一个模 p 原根。

二、（10 分） 令 $F_n = 2^{2^n} + 1, n \geq 1$。

(1). 证明 $(F_i, F_j) = 1, \forall\, i \neq j$。

(2). 利用 (1) 证明素数有无穷多个。

三、(15 分) 若正整数 n 满足 $\sum\limits_{1\le d|n} d = 2n$，则称 n 为**完全数**。

(1). 证明偶完全数具有形式 $2^{p-1}(2^p-1)$，其中 p 和 2^p-1 均为素数。

(2). 试找出 100 以内的所有完全数。

四、(15 分) 设 $n > 1$ 为正整数。令 $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次复单位根，其中 $i = \sqrt{-1}$。

(1). 设 $0 \le k \le n$ 为整数。试计算 $\prod_{0 \le i \le n-1, i \ne k} (\zeta_n^k - \zeta_n^i)$。

(2). 利用 (1) 中结论，计算 $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \sin 3^\circ \cdots \sin 90^\circ$。

五、(10 分) 求所有素数 p 使得 $x^2 - 10$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可约，其中 $\mathbb{F}_p$ 为 p-元域。

六、(10 分) 对有理数 x，令 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

(1). 对任意素数 p，p 在 $n!$ 中出现的指数恰为 $[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$;

(2). 对任意 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k, k\geq 1, m_i\geq 1$，$\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 为整数。

七、(35 分) 令 $\mathcal{A} = \{f \mid f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}\}$ 为取值在有理数域的数论函数全体。记 ϵ 为由 $\epsilon(1) = 1, \epsilon(n) = 0, \forall n \geq 2$ 给出的函数。考察 $\mathcal{A}$ 上运算：

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n), \quad (fg)(n) = f(n)g(n), \quad (f * g)(n) = \sum_{1 \leq d | n} f(d) g(\frac{n}{d}).$$

(1). 证明 $(\mathcal{A}, +, *)$ 形成一个含幺交换环，其幺元恰为 ϵ；

(2). 证明 $f(g * h) = (fg) * h + g * (fh), \forall f, g, h \in \mathcal{A}$;

(3). 证明 $f \in \mathcal{A}$ 在运算 $*$ 下可逆当且仅当 $f(1) \neq 0$; 记 f 的逆为 f^{-1}。

(4). 证明 $\mu * \mathbf{1} = \epsilon$, 其中 μ 为莫比乌斯函数，即 $\mu(1) = 1$，$\mu(n) = (-1)^s$ 若 n 为 s 个互不相同的素数的乘积，否则 $\mu(n) = 0$，$\mathbf{1}$ 为值等于 1 的常值函数。

(5). 证明所有非 0 的积性函数 (即 $f(mn) = f(m)f(n), \forall (m, n) = 1$) 在 $*$ 下形成一个群。

(6). 设 $f \in \mathcal{A}$ 为非 0 积性函数。试求 f^{-1}。

(7). 试找出 $(\mathcal{A}, *)$ 中有限阶元。