

2020 秋数学分析(B3)期末

时间：两个小时，授课教师：陈卿 张永兵

一、判断题 (16 分) 关于 \mathbb{R}^2 的拓扑性质和可积性的一些结论，相关结论大都在书上课后题中。

二、填空题 (24 分)

三 (10 分) 令

$$T(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{5}{a \cos \alpha_1} + \frac{7}{b \cos \alpha_2}, \alpha_1, \alpha_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

约束条件 $5 \tan \alpha_1 + 7 \tan \alpha_2 = 1$

- (1) 求约束条件下 T 极值点满足的另一条件;
- (2) 利用 Hesse 矩阵判断上述极值点是极大值点还是极小值点。

四 (9 分) 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, D 上连续函数列 $\{f_n\}$ 关于 n 单调递减趋于 0, , 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\sigma = 0.$$

五 (15 分) 令 $\gamma(t) = x_0 + tv, x_0, v \in \mathbb{R}^3$ 为固定向量, $|v| = 1$ 。令

$$F(x, t) = |x - \gamma(t)| - t, t \geq 0$$

证明:

- (1) 对固定的 $x \in \mathbb{R}^3$, $F(x, t)$ 关于 t 单调递减;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, t)$ 存在
- (3) 令 $g_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(x, t)$, 证明 $g_\gamma(x)$ 一致连续。

六 (15 分) 设 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq \frac{1}{2}|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

证明: (1) φ 是单射; (2) $d\varphi$ 处处可逆; (3) φ 是满射。

七 (16 分) 始 $\mathbb{M}(3)$ 为 9 维实线性空间, 令 $M = \{A \in \mathbb{M}(3) | AA^T = I_3\}$.

- (1) 证明存在 I_3 一个邻域 V , $M \cap V$ 为 $\mathbb{M}(3)$ 中 3 维曲面;
- (2) $M \cap V$ 可以表示为 $A = (a_{ij})$ 中哪三个变量的图? (选择题)
- (3) 证明 M 为 $\mathbb{M}(3)$ 中 3 维曲面;
- (4) 判断: M 是否紧致? 是否道路联通?

前三小问需要过程, 最后一问不用。

六 (3) 的提示 (来自回忆者): 证明 $\varphi(\mathbb{R}^3)$ 是闭集, 再利用前面的小问证它是开集。

题目可能有部分地方记忆有出入 😞