2020年秋季学期数学分析(A1)期末考试

主讲教师: 任广斌、罗罗（出题）*

2021年3月7日 14:30-17:00

一、设$a, b > 0$, 计算积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx.$$

二、证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T \frac{1}{(1+t^4)^n} dt = 0.$

三、设$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$. 计算各阶导数$f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

四、证明：$\sin 1$是无理数。（提示：使用Taylor公式）

五、设有抛物线$y = ax^2 + bx$. 当$x \in [0, 1]$时有$y \geq 0$. 又已知该抛物线与x轴及直线$x = 1$所围图形的面积为$1/3$. 求常数a, b使得上述所围成的图像绕x轴旋转一周所得的旋转体体积最小。

六、设$f, g \in C[a, b]$. 证明：存在$\zeta \in (a, b)$, 使得

$$f(\zeta) \int_\zeta^b g(x) dx = g(\zeta) \int_a^\zeta f(x) dx.$$

七、设F在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，且$F' \in R[a, b]$. 证明：

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

八、已知$\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^1 x f(x) dx = 1$. 证明：

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 12.$$

九、设$f \in R[0, 1]$且$0 \leq f(x) \leq 1$. 证明：存在$[0, 1]$上只取值于0、1的分段函数$g(x)$使得

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

十、设$f \in R[0, 1]$且$0 \leq f(x) \leq 1$. 证明：对任意$\varepsilon > 0$，存在$[0, 1]$上只取值于0、1的分段函数$g(x)$使得对任意$[a, b] \subseteq [0, 1]$有

$$\left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

*整理：肖宇，录入：章俊彦。