授课教师：王新茂
整理：张永畅

线性代数 A2 期中考试

2020 年 11 月 25 日 9:45—11:45，地点 5302

姓名__________________ 学号________________________ 得分____________

说明：第 1 题 10 分，第 2 ～ 7 题各 15 分，共 100 分.

1. 求 $\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \\ x^3 & x^6 & x^9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{3\times 3}$ 的模相抵标准形.

2. 设复方阵 A 满足 $d_A(x) = \varphi_A(x) = (x - x^3)^6$. 求 $B = A^4$ 的特征多项式、最小多项式和初等因子组.

3. 设 $P = J_n(1)$ 是 n 阶 Jordan 块. 求复线性空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(X) = P^{-1}XP$ 的所有特征值及其对应的特征子空间.

4. 设 n 阶复方阵 A 的每行、每列都恰有一个非零元素. 证明：存在可逆复方阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

5. 证明或否定：对于任意可逆实方阵 A，存在实方阵 B，使得 $A = B^3$.

6. 设 $\mathcal{D} : f(x) \mapsto f'(x)$ 是实线性空间 $V = \mathbb{R}[x]$ 上的微分变换，U 是 $\mathcal{D}$-不变子空间. 证明：若 $U \neq V$，则存在 $\alpha \in V$ 使得 $U = \{f(\mathcal{D})\alpha \mid f \in V\}$.

7. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换，$f, g \in \mathbb{F}[x]$ 互素. 证明：

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} g(\mathcal{A}).$$

参考答案

1. 由初等模变换或者 $D_1 = x$，$D_2 = x^4(x-1)$，$D_3 = x^{10}(x-1)^3(x+1)$，可得模相抵标准形为 $\operatorname{diag}(x, x^3(x-1), x^6(x-1)^2(x+1))$.

2. A 的 Jordan 标准形为 $\operatorname{diag}(J_6(1), J_6(-1), J_6(0))$，$A^4$ 的 Jordan 标准形为 $\operatorname{diag}(J_6(1), J_6(1), J_2(0), J_2(0), 0, 0)$，初等因子组 $\{(x-1)^6, (x-1)^6, x^2, x^2, x, x\}$，$\varphi_B = x^6(x-1)^{12}$，$d_B = x^2(x-1)^6$.

3. $\mathcal{A}(X) = \lambda X\ (X \neq O) \Rightarrow XP = \lambda PX \Rightarrow (\lambda P - I)X = X(P-I) \Rightarrow (\lambda P - I)^n X = X(P-I)^n = O \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ 特征值空间 $= \{f(P) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$.

4. A 可置换相似成 $\operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_k)$ 形式，每个 A_i 形如 $\begin{pmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{p-1} \\ a_p & & & \end{pmatrix}$，$a_1, \cdots, a_p \neq 0$，其它元素都是 0. $A_i^p = (a_1 \cdots a_p)I \Rightarrow d_{A_i}$ 无重根 $\Rightarrow A_i$ 可相似成对角阵. 故 A 可相似成对角阵.

5. 结论正确. 不妨设 $d_A = \varphi_A = p^n$，其中 $p \in \mathbb{R}[x]$ 不可约.

   情形 1：$p(x) = x - a$. A 与 $J_n(a)$ 实相似. 设 $C = J_n(\sqrt[3]{a})$，则 C^3 与 A 实相似，故存在实方阵 B 使得 $B^3 = A$.

   情形 2：$p(x) = (x-w)(x-\bar{w})$，$w \notin \mathbb{R}$. A 与 $\operatorname{diag}(J_n(w), J_n(\bar{w}))$ 复相似. 设实方阵 $C = \begin{pmatrix} C_1 & E & & \\ & C_1 & \ddots & \\ & & \ddots & E \\ & & & C_1 \end{pmatrix}$，其中 $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$C_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 满足 $(a + b\,\mathrm{i})^3 = w$，则 C 与 $\operatorname{diag}(J_n(a+b\,\mathrm{i}), J_n(a-b\,\mathrm{i}))$ 复相似，C^3 与 A 复相似，进而 C^3 与 A 实相似. 故存在实方阵 B 使得 $B^3 = A$.

6. $\forall \alpha \in U$，$\operatorname{Span}(\alpha, \mathcal{D}\alpha, \cdots, \mathcal{D}^k\alpha) = \mathbb{R}_{k+1}[x]$，其中 $k = \deg \alpha$. 若 $\max\limits_{\alpha \in U} \deg \alpha = \infty$，则 $U = V$. 否则，设 $\alpha \in U$ 使得 $\deg \alpha$ 最大，则 $U = \{f(\mathcal{D})\alpha \mid f \in V\}$.

7. 根据 Bezout 定理，存在 $u, v \in \mathbb{F}[x]$，使得 $uf + vg = \gcd(f, g) = 1$.

   易知 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ 和 $\operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$ 都是 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$ 的子空间.

   对任意 $\alpha \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$，有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，其中 $\alpha_1 = u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha \in \operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$，$\alpha_2 = v(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$. 故 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) \subset \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$.

   特别，当 $\alpha \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$ 时，由 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，得 $\alpha = 0$.

   综上，$V = \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \bigoplus \operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$.