《几何分析》期末考试题

2020年秋季学期

授课教师：李嘉禹

题目 1. 设M是紧致无边的黎曼流形，$Ric(M)\geq 0$，$u(x,t)$是M上热方程的非负解

$$(\Delta-\frac{\partial}{\partial t})u(x,t)=0. \tag{1}$$

请证明在$M\times(0,\infty)$上 u 满足下列梯度估计：

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\frac{u_t}{u}\leq\frac{n}{2t}.$$

题目 2. 我们考虑平均曲率流，即设$X:M^n\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$为一族超曲面，满足方程

$$\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)=-H(x,t)N(x,t),\quad \forall x\in M^n,\ t\in[0,T), \tag{2}$$

这里H为平均曲率，N为单位法向。在局部坐标下，我们记超曲面的诱导度量g的分量为$g_{ij}=\langle\frac{\partial X}{\partial x_i},\frac{\partial X}{\partial x_j}\rangle$，记$g$的逆矩阵的分量为$g^{ij}$，记第二基本形式II的分量为$h_{ij}=-\langle\frac{\partial^2 X}{\partial x_i\partial x_j},N\rangle$，平均曲率的定义为$H=g^{ij}h_{ij}$。请证明如下发展方程：

(1) $\frac{\partial}{\partial t}N=\nabla H.$

(2) $\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}=2Hh_{kl}g^{ik}g^{lj}.$

(3) $\frac{\partial}{\partial t}h_{ij}=\Delta_g h_{ij}+|\mathrm{II}|^2h_{ij}-2Hh_{ik}g^{kl}h_{lj}.$

(4) $\frac{\partial}{\partial t}H=\Delta_g H+|\mathrm{II}|^2H.$