2020~2021第一学期实用随机过程期末考试

1. 试列表判断如下几类过程是否具有独立增量性、平稳增量性、Markov性质：

(1) 齐次Poisson过程；(2) 非齐次Poisson过程；(3) 标准更新过程；(4) Brown运动.(共8分)

2. 设$\{N(t), t\geq 0\}$是以独立同分布的随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$为间隔的更新过程，

其中$P(X_1=1)=p$, $P(X_1=0)=1-p$, 其中$0<p<1$.

(1) 求于时刻0点发生的更新个数随机变量$N(0)$的概率分布；

(2) 求于时刻2点发生的更新个数随机变量的概率分布；

(3) 求$\lim\limits_{t\to\infty} E[N(t)]/t$. (共12分，每小题4分)

3. 连续抛掷一枚非均匀硬币，每次抛出正面的概率为$p\in(0,1)$，抛出反面的概率为$q=1-p$.

(1) 求直到出现花样"正反正反正反正"时抛掷次数的期望.

(2) 求直到抛出上述花样时抛出正面的期望次数.(共20分，每小题10分)

4. 设A、B两盒中共装有N个编号为1、2、…N的小球. 考虑如下试验：

先从N个小球中随机地取出一个小球(每球被取出的概率等可能)，再任意指定一个盒子. A盒被指定的概率为p, B盒被指定的概率为$1-p$. 然后把所取出的小球放入指定的盒子中，如此不停地重复试验. 记X_n为n次试验后A盒中小球的个数，X_0表示试验之前A盒中小球的个数，则$\{X_n, n\geq 0\}$构成一个Markov链。

(1) 求该Markov链转移概率矩阵P；

(2) 试判断此链是否可约？每个状态是否具有常返性？每个状态是否有周期？(其中假定$0<p<1$)

(3) 当$N=3$, $p=1/2$时，试求该Markov链的平稳分布$\pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

(4) 记$P^{(n)}$为该Markov链的n步转移概率矩阵，当$N=3$, $p=1/2$时，求$\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$，并对结果做出解释.(共24分，每小题6分)

5. 一个修理工照看机器1和机器2，每次修复后，机器 i 保持正常运行，运行时间服从参数(失效率) λ_i 的指数分布，$i=1,2$. 当机器 i 失效时，需要进行修理，修理时间服从参数 μ_i 的指数分布. 机器1的修理具有优先权，在机器1失效时总是先修理它. 例如，若正在修理机器2时机器1突然失效，则修理工将立刻停止修理机器2，而开始修理机器1. (前两小问10′，第三问4′)

(1) 为该题建立有限状态的连续时间 Markov链，写成相应的转移强度矩阵 Q;

(2) 设 $\lambda_i=\mu_i=1+i$, $i=1,2$. 若系统长时间运行下去，求机器2失效的时间占比;

(3) 每当两台机器同时处于失效状态时，求同时处于失效状态持续的时长分布.

6. 设 $\{B(t), t\geq 0\}$ 是一个标准布朗运动，定义随机变量序列 $X_n=B^2(n)-n$, $n\geq 1$.

(1) 证明 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为一个鞅.

(2) 求如下的概率

$$P(\max_{0\leq s\leq n} B(s)\geq u_{0.05}\sqrt{n})$$，其中 u_α 是标准正态分布的上 α-分位点.

(共12分，每小题6分)