完全非线性椭圆方程期末考试题

1(30分)，考虑下面的$Hessian$方程

$$\begin{cases} \sigma_k(\lambda(D^2u)) = f(x) \ \ in\ \Omega, \\ u = \varphi \ \ on \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

其中$\lambda(D^2u) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$为$\{D^2u\}$的特征值，$\sigma_k(\lambda)$为$k$次基本对称多项式，假设$f \in C^\infty(\overline{\Omega})$，且$f > c_0$,$\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$，$\Omega$是一个光滑的$k-1$ 凸区域：

(a),请证明如果我们得到了$||u||_{C^2(\overline{\Omega})} \le C$，$C$是一个一致的常数，如何说明方程(0.1) 是一致椭圆的。（等价于证明存在一个常数C_0使得对应的对应的$\{F^{ij}\}_{1\le i,j\le n} = \{\frac{\partial\sigma_k(\lambda(D^2u))}{\partial u_{ij}}\}_{1\le i,j\le n} \ge C_0 I$。）

(b),请证明当$\lambda(D^2u) \in \Gamma_k$时($\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^n | \sigma_i(\lambda) > 0, \forall \ \ 1 \le i \le k\}$)，$\frac{\partial^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}(\lambda(D^2u))}{\partial u_{ij}\partial u_{rs}}\xi_{ij}\xi_{rs} \le 0$,其中$\{\xi_{ij}\}$是$n\times n$的实对称矩阵。

(c),请证明如果我们得到了两阶导数的一致估计，如何得到(0.1)会存在唯一允许解$u \in C^\infty(\Omega)$？（请写清楚如何使用连续性方法得到解的存在性，以及证明唯一性，和区域内部的高阶的正则性怎么得到。）

2(20分),证明下面的边界法向梯度估计。

假设$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足下面的一致椭圆性方程，

$$\begin{cases} a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu = f(x,u) \ \ in\ \Omega, \\ u = \varphi \ \ on \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Ω满足一致外球条件，$a_{ij}, b_i \in C(\overline{\Omega})$，且$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \theta|\xi|^2$。$\nu$为边界的法向（内或者外）因此则有

$$|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)| \le C, \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{0.3}$$

其中C是一个同$\lambda, \Omega, |a_{ij}|_{L^\infty}, |b_i|_{L^\infty}, M = |u|_{L^\infty}, |f|_{L^\infty(\Omega\times[-M,M])}, and \ |\varphi|_{C^2}(\Omega)$，有关的常数。

3(10分)，考虑方程(0.1)，请证明下面的结论。

$$\begin{aligned} &\sup_{\overline{\Omega}}|Du| \le C(1+\sup_{\partial\Omega}|Du|), \\ &\sup_{\overline{\Omega}}|D^2u| \le C(1+\sup_{\partial\Omega}|D^2u|). \end{aligned} \tag{0.4}$$

其中C是同f, φ, Ω等有关的一致常数。

4(20分)，请证明$Calabi-Yau$定理中的复$Monge-Ampere$方程$\det(u_{i\bar{j}} + g_{i\bar{j}}) = f(z)$ 的两阶导数估计，即

$$\max_{\overline{M}}|D^2u| \le C \tag{0.5}$$

其中(M,g)是一个紧致的$Kahler$流形，C是一个同$|\nabla u|$无关的一致常数。(交换导数时请写清楚交换公式)

5(20分)，证明2003年管鹏飞老师$Annal$的论文中构造的下解满足$\det(\underline{u}_{ij}) \ge \varepsilon_0$，其中$\varepsilon_0$是一个一致的常数。

下面为管鹏飞在文章中构造的下解，

$$f(x) = \begin{cases} 1 + A\sigma \qquad if\ x\ is\ closed\ to\ \partial\Omega_0 = \Gamma_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_1, \qquad V_1 \end{cases}$$

其中φ_1见麻老师讲义的构造。