授课教师：刘世平、韦勇（命题）

中国科学技术大学数学科学学院

2020年秋季学期《微分几何》期中考试- 参考解答

2020年12月1 日，9：45 - 11:45

姓名：＿＿＿＿＿＿　　　学号：＿＿＿＿＿＿

注意事项：

1. 请将解答写在答题纸上，试卷和答题纸一并上交。
2. 闭卷考试。

第一部分：基本概念和性质（25分）

1. [5分] 叙述三维欧氏空间$\mathbb{E}^3$中的曲线上的Frenet标架运动方程，即Frenet公式：

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}(s)\\ \mathbf{n}(s)\\ \mathbf{b}(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa(s) & 0\\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}(s)\\ \mathbf{n}(s)\\ \mathbf{b}(s)\end{pmatrix}$$

2. [3分] $\mathbb{E}^3$中曲率为正常数且挠率为非零常数的曲线是＿圆柱螺线＿.
3. [9分] 设S为$\mathbb{E}^3$中一张曲面，参数表示是$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$. 记$E,F,G$为曲面$S$的第一基本形式的系数，$L,M,N$为第二基本形式的系数。
   (a) 请写出求曲面S的面积的公式＿$Area(S)=\int_D\sqrt{EG-F^2}dudv$＿.
   (b) Gauss曲率$K=$＿$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$＿.
   (c) 当曲面一点$p\in S$处的Gauss曲率K满足＿$K(p)<0$＿时，我们称该点为双曲点。
4. [4分] 设S为$\mathbb{E}^3$中一张曲面，其第二基本形式II和Weingarten 变换$\mathcal{W}$满足如下关系：对曲面上一点$p\in S$处的任意两个切向量$\vec{v},\vec{w}\in T_pS$，有＿$II(\vec{v},\vec{w})=\langle\mathcal{W}(\vec{v}),\vec{w}\rangle$＿
5. [4分] 曲面S上一点p沿某个单位切向量$\vec{v}\in T_pS$的法曲率$\kappa_n(\vec{v})$ 可由该点处的两个主曲率κ_1,κ_2和$\vec{v}$与其中一个主方向e_1的夹角θ唯一决定。请写出这个关系式＿$\kappa_n(\vec{v})=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta$＿.

第二部分：计算和证明题（75分）

1. [20 分] 设$\alpha: I\to\mathbb{E}^3$ 是3维欧氏空间中的正则曲线，曲率函数$\kappa(s)>0$, $\forall\ s\in I$, s为弧长参数。

(a) 证明存在向量场$\omega : I \to \mathbb{E}^3$ 满足

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}}(s) =&\omega(s) \wedge \mathbf{t}(s)\\ \dot{\mathbf{n}}(s) =&\omega(s) \wedge \mathbf{n}(s)\\ \dot{\mathbf{b}}(s) =&\omega(s) \wedge \mathbf{b}(s)\end{aligned}$$

上式中的· 代表对s求导数, 即$\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{t}(s)$. 向量场$\omega(s)$称为曲线的角速度场。
[提示：将$\omega(s)$用Frenet标架待定系数表示出来，代入上述方程求解系数]

(b) 证明以$\alpha(s)$为准线，$\omega(s)$ 为直母线的方向向量的直纹面

$$\mathbf{r}(s, t) = \alpha(s) + t\omega(s)$$

是可展曲面。

(c) 证明$\omega(s) \equiv \omega_0, \forall\ s \in I$ 当且仅当曲线$\alpha(s)$ 是圆柱螺旋线。

解答:

(a) 由于$\{\alpha(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 为$\alpha(s)$处的正交标架，可设

$$\omega(s) = \lambda_1(s)\mathbf{t}(s) + \lambda_2(s)\mathbf{n}(s) + \lambda_3(s)\mathbf{b}(s).$$

代入上述方程可得

$$\begin{aligned}\kappa(s)\mathbf{n}(s) =& -\lambda_2(s)\mathbf{b}(s) + \lambda_3(s)\mathbf{n}(s)\\ -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) =&\lambda_1(s)\mathbf{b}(s) - \lambda_3(s)\mathbf{t}(s)\\ -\tau(s)\mathbf{n}(s) =& -\lambda_1(s)\mathbf{n}(s) + \lambda_2(s)\mathbf{t}(s)\end{aligned}$$

比较两边系数得到$\lambda_1(s) = \tau(s), \lambda_2(s) = 0, \lambda_3(s) = \kappa(s)$. 即$\omega(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$.

(b) 为证明直纹面

$$\mathbf{r}(s, t) = \alpha(s) + t\omega(s)$$

是可展曲面，只需计算其Gauss曲率为零。直接计算可得

$$\begin{aligned}r_s =&\dot{\alpha} + t\dot{\omega}, \quad r_t = \omega\\ r_{ss} =&\ddot{\alpha} + t\ddot{\omega}, \quad r_{st} = \dot{\omega}, \quad r_{tt} = 0.\end{aligned}$$

因此第二基本形式的系数$N = 0$,

$$\begin{aligned}M =&\frac{1}{|r_s \wedge r_t|}\langle r_{st}, r_s \wedge r_t\rangle\\ =&\frac{1}{|r_s \wedge r_t|}(\dot{\omega}, \dot{\alpha} + t\dot{\omega}, \omega)\\ =&\frac{1}{|r_s \wedge r_t|}(\dot{\omega}, \mathbf{t}, \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b})\end{aligned}$$

而$\dot{\omega}$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\omega(s) =&\tau(s)\dot{\mathbf{t}}(s) + \dot{\tau}(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\dot{\mathbf{b}}(s) + \dot{\kappa}(s)\mathbf{b}(s)\\ =&\dot{\tau}(s)\mathbf{t}(s) + \dot{\kappa}(s)\mathbf{b}(s)\end{aligned}$$

代入M的表达式得到$M = 0$. 从而Gauss曲率$K = 0$，曲面为可展曲面。

(c) 当$\omega(s)\equiv\omega_0$时，

$$0=\frac{d}{dt}\omega(s)=\dot{\tau}(s)\mathbf{t}(s)+\dot{\kappa}(s)\mathbf{b}(s)$$

由于$\mathbf{t}(s),\mathbf{b}(s)$正交，因此$\tau(s),\kappa(s)$均为常数，从而由曲线论基本定理知曲线为圆柱螺线。反过来，如果已知曲线为圆柱螺线，则$\tau(s),\kappa(s)$均为常数，从上述推导过程可知$\omega(s)$为常数。

2. [20 分] Enneper曲面是一个由参数表示

$$r(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,v-\frac{v^3}{3}+vu^2,u^2-v^2\right)$$

给出的曲面。

(a) 证明Enneper曲面是极小曲面；

(b) 求Enneper曲面上的曲率线（即切向量为主方向的曲线），并证明曲率线为平面曲线；

(c) 求Enneper曲面上的渐近曲线（即切向量的法曲率为零的曲线），并说明渐近曲线处处正交。

解答：

(a) 直接计算可得第一，第二基本形式的系数分别为

$$E=G=(1+u^2+v^2)^2,\quad F=0$$
$$L=2,\quad M=0,\quad N=-2$$

从而主曲率为

$$\kappa_1=\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2},\quad \kappa_2=-\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

因此平均曲率$H=0$，Enneper曲面是极小曲面.

(b) 由$F=M=0$，可知Weingarten变换在基底r_u,r_v下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}E&0\\0&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&0\\0&N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{L}{E}&0\\0&\frac{N}{G}\end{pmatrix}$$

因此r_u,r_v均为主方向，从而参数曲线u-线和v-线均为曲率线。直接计算可得

$$\begin{aligned}(r_u,r_{uu},r_{uuu})&=\big((1+v^2-u^2,2uv,2u),(-2u,2v,2),(-2,0,0)\big)\\&=\langle(1+v^2-u^2,2uv,2u),(0,-4,4v)\rangle\\&=0\end{aligned}$$

即参数曲线u-线是平面曲线。同样地，v-线也是平面曲线。

(c) 设$\alpha(s)=r(u(s),v(s))$为Enneper曲面上的渐近曲线，则其切向量

$$\alpha'(s)=u'(s)r_u+v'(s)r_v$$

为渐近方向。因此其法曲率$\kappa_n(\alpha'(s))\equiv0$，即

$$0=L(u'(s))^2+2Mu'(s)v'(s)+N(v'(s))^2=2((u'(s))^2-(v'(s))^2).$$

从而$u'(s)\pm v'(s)=0$. 对参数s积分，可得$u\pm v=const.$ 即$u\pm v=const.$在映射r下的象为曲面上的渐近曲线。

3. [20 分] 设$S: r=r(u,v)$为正则参数曲面且Gauss曲率K处处非零，$\mathbf{n}=\mathbf{n}(u,v)$为$S$的单位法向量。定义$S$的平行曲面为

$$\tilde{S}: \quad \tilde{r}(u,v)=r(u,v)+\lambda\mathbf{n}(u,v),$$

其中$\lambda>0$是充分小的数。

(a) 证明曲面S和$\tilde{S}$在对应点的切平面平行；

(b) 设$\kappa_1(p),\kappa_2(p)$为$p=r(u,v)\in S$处的主曲率，对应的主方向为$e_1,e_2\in T_pS$。证明e_1,e_2 也为$\tilde{p}=p+\lambda\mathbf{n}(u,v)$处的主方向，对应的主曲率为

$$\tilde{\kappa}_i(\tilde{p})=\frac{\kappa_i(p)}{1-\lambda\kappa_i(p)}, \quad i=1,2$$

[提示：可设$e_1=ar_u+br_v$，利用Weingarten变换的定义$\mathcal{W}(r_u)=-\mathbf{n}_u$，$\mathcal{W}(r_v)=-\mathbf{n}_v$，及主曲率的性质$\mathcal{W}(e_1)=\kappa_1e_1$.]

(c) 证明曲面$\tilde{S}$和S的平均曲率和Gauss曲率满足如下关系：

$$\tilde{K}=\frac{K}{1-2H\lambda+K\lambda^2}, \qquad \tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2H\lambda+K\lambda^2}$$

并说明当曲面S具有常平均曲率$H\equiv\frac{1}{2\lambda}$时，曲面$\tilde{S}$具有常Gauss曲率$\tilde{K}=\frac{1}{\lambda^2}$.

解答：

(a) 由$\tilde{r}_u=r_u+\lambda\mathbf{n}_u$，$\tilde{r}_v=r_v+\lambda\mathbf{n}_v$知，曲面$S$和$\tilde{S}$在对应点的切平面平行，且具有相同的单位法向量$\tilde{\mathbf{n}}(u,v)=\mathbf{n}(u,v)$.

(b) 设主方向$e_1=ar_u+br_v$，则

$$\kappa_1e_1=\mathcal{W}(e_1)=a\mathcal{W}(r_u)+b\mathcal{W}(r_v)=-(a\mathbf{n}_u+b\mathbf{n}_v).$$

从而

$$a\tilde{r}_u+b\tilde{r}_v=e_1+\lambda(a\mathbf{n}_u+b\mathbf{n}_v)=(1-\kappa_1\lambda)e_1. \tag{1}$$

因曲面$\tilde{S}$的单位法向量$\tilde{\mathbf{n}}(u,v)=\mathbf{n}(u,v)$，其Weingarten 变换满足

$$\tilde{\mathcal{W}}(\tilde{r}_u)=-\mathbf{n}_u, \qquad \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{r}_v)=-\mathbf{n}_v$$

由(1)知e_1也为$\tilde{p}\in\tilde{S}$处的切向量，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{W}}(e_1)=&\frac{1}{1-\lambda\kappa_1}\tilde{\mathcal{W}}(a\tilde{r}_u+b\tilde{r}_v)\\=&-\frac{1}{1-\lambda\kappa_1}(a\mathbf{n}_u+b\mathbf{n}_v)\\=&\frac{\kappa_1}{1-\lambda\kappa_1}e_1.\end{aligned}$$

类似的，也可得到e_2为$\tilde{p}\in\tilde{S}$处的主方向，其主曲率为$\kappa_2/(1-\lambda\kappa_2)$.

(c) 由(b)得

$$\begin{aligned}\tilde{K}=&\tilde{\kappa}_1\tilde{\kappa}_2=\frac{\kappa_1\kappa_2}{1-(\kappa_1+\kappa_2)\lambda+\kappa_1\kappa_2\lambda^2}\\=&\frac{K}{1-2H\lambda+K\lambda^2}\end{aligned}$$

类似的，平均曲率也满足

$$\tilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2H\lambda+K\lambda^2}$$

当$H\equiv\frac{1}{2\lambda}$时且$K\neq0$时，$\tilde{K}=\frac{1}{\lambda^2}$为常数。

注：事实上，在考虑(c)时，此题最初的假设条件“Gauss曲率处处非零“并不是必需的，因为若$H\equiv\frac{1}{2\lambda}$且在某个点$p\in S$处$K=0$，则$\tilde{H}(\tilde{p})=\infty$，与$\tilde{S}$为正则曲面矛盾。因此$K\neq 0$ 在S上处处成立。

4. [15 分] 设S为$\mathbb{E}^3$中正则曲面，$\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ 为S 上一条正则曲线，$p=\alpha(0)\in S$，s为弧长参数。记$\mathbf{t}=\alpha'(0)$为曲线在p点处的切向量，$\mathbf{h}\in T_pS$为曲面在p点处与$\mathbf{t}$正交的单位切向量，且$\{\mathbf{t},\mathbf{h}\}$ 与曲面的定向相同，即$\mathbf{t}\wedge\mathbf{h}=\mathbf{n}$，其中$\mathbf{n}$为曲面$S$的单位法向量。定义曲线$\alpha(s)\subset S$在$p=\alpha(0)$处的测地挠率为

$$\tau_g=\langle\frac{d\mathbf{n}}{ds}(0),\mathbf{h}\rangle,$$

其中$\mathbf{n}=\mathbf{n}(s)$为曲面在$\alpha(s)$处的单位法向量。

(a) 记$\mathcal{W}:T_pS\to T_pS$为曲面在p点处Weingarten 变换，说明

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(0)=-\mathcal{W}(\frac{d\alpha}{ds}(0)).$$

(b) 设κ_1,κ_2为曲面在p点处的主曲率，e_1,e_2为对应的单位正交主方向，且$\{e_1,e_2,\mathbf{n}\}$为正定向(即$\mathbf{n}=e_1\wedge e_2$)。若e_1与$\mathbf{t}$的夹角为φ，证明

$$\tau_g=(\kappa_1-\kappa_2)\cos\varphi\sin\varphi.$$

(c) 证明曲线$\alpha(s)$为曲面S上的曲率线当且仅当其测地挠率τ_g恒为零。

解答:

(a) 由Weingarten变换的定义$\mathcal{W}(r_u)=-\mathbf{n}_u$, $\mathcal{W}(r_v)=-\mathbf{n}_v$知

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\frac{d\alpha}{ds})=&\mathcal{W}(u'(s)r_u+v'(s)r_v)\\=&-(u'(s)\mathbf{n}_u+v'(s)\mathbf{n}_v)\ =\ -\frac{d\mathbf{n}}{ds}.\end{aligned}$$

(b) 因e_1与$\mathbf{t}$的夹角为φ，且$\{e_1,e_2\}$与$\{\mathbf{t},\mathbf{h}\}$定向相同，可将$\mathbf{t},\mathbf{h}$表示为

$$\mathbf{t}=e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi,\qquad \mathbf{h}=e_2\cos\varphi-e_1\sin\varphi.$$

由(a)可知，

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(0)=-\mathcal{W}(\frac{d\alpha}{ds}(0))=-\mathcal{W}(\mathbf{t})$$

因此

$$\begin{aligned}\tau_g=&-\langle\mathcal{W}(\mathbf{t}),\mathbf{h}\rangle\\=&-\langle\mathcal{W}\left(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi\right),e_2\cos\varphi-e_1\sin\varphi\rangle\\=&-\langle\kappa_1e_1\cos\varphi+\kappa_2e_2\sin\varphi,e_2\cos\varphi-e_1\sin\varphi\rangle\\=&(\kappa_2-\kappa_1)\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

(c) 曲线$\alpha(s)$为曲率线，其切向量$\mathbf{t}$为主方向，因此$\mathbf{t}=e_1$ 或$\mathbf{t}=e_2$. 从而夹角$\varphi=0,\pi/2$. 由(b)得$\tau_g\equiv 0$.