

1. Gauss lemma

2.  $\# \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$   
 $\text{Max } \mathbb{Z}[X]$

3. 证  $(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$

4. 证  $A/a \otimes_A M \cong M/aM$

5.  $f: A \rightarrow B$

$M$  flat  $A$ -module

证:  $M_B = B \otimes_A M$  is flat  $B$ -module.

6.  $\mathbb{Z}[X] \neq$ . 证  $q = (p^n, x)$ ,  $n > 1$  为唯素, 但非素理想幂次

7.  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ,  $I = (2, 1 + \sqrt{5})$ ,  $\mathfrak{p}$  prime ideal

(1)  $2 \notin \mathfrak{p}$ , 证  $I_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$

(2)  $2 \in \mathfrak{p}$ . 证  $\mathfrak{p} = I$  且  $I_{\mathfrak{p}} = (1 + \sqrt{5})A_{\mathfrak{p}}$

(3) 证  $\forall \mathfrak{p}$ .  $I_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$  ~~且~~ (作为  $A_{\mathfrak{p}}$ -modules)

但  $I \neq A$  作为  $A$ -module

8.  $\#$   $\mathbb{Z}$  在  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  中的整闭包

9.  $a$  为 decomposable ideal.  $\mathfrak{p}$  为  $(a:x)$  中极大元,  $a \notin \mathfrak{p}$ .  
证  $\mathfrak{p}$  为素理想 且属于  $a$

10.  $A$  为整环,  $\mathfrak{p}_i$  为素理想.  $S = A - \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$

(1) 证  $S^{-1}A$  本单

(2)  $A_{\mathfrak{p}_i} \cong (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$

(3)  $S^{-1}A = \bigcap_{i=1}^n A_{\mathfrak{p}_i}$