2019年春季学期拓扑学(H)期末考试
原卷为英文版

整理人：付杰、章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

主讲教师：王作勤

一、叙述如下定理内容（20分，每题4分，六选五）

1. Van Kampen定理
2. Brouwer不动点定理
3. Urysohn引理
4. Stone-Weierstrass定理
5. Tychonoff(吉洪诺夫)定理
6. 无边曲面的分类定理

二、判断题（20分，每题2分）

（　）拓扑空间X中，对任意两个不交的紧集K_1, K_2，都存在X中不交的开集U_1, U_2使得$K_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

（　）若$f : X \to Y$是连续映射，且$U \subset X$是开集，则$f(U)$是Y中的开集。

（　）若X, Y是仿紧空间，则$X \times Y$也是仿紧的。

（　）设$X \subseteq \mathbb{R}$赋予子空间拓扑，$A \subset X$是X的一个连通分支，则A中X中既开又闭。

（　）设X是紧度量空间，$f : X \to X$是同构，则f^{-1}必是连续映射。

（　）若X, Y道路连通，则$X \times Y$也是道路连通的，并且基本群$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

（　）不存在任何球面S^2到其赤道S^1的形变收缩(retraction).

（　）任何拓扑空间都是一个可缩(contractible)空间的子空间。

（　）设X是道路连通的，$p : X \to S^2$是复叠映射，则$X \simeq S^2$.

（　）任何拓扑流形都可度量化。

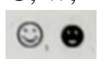
（　）若曲面M_1, M_2, N满足$M_1 \sharp N \simeq M_2 \sharp N$, 则$M_1 \simeq M_2$.

三、填空题（15分，第一题8分，第二题7分）

1. 给出以下9组拓扑空间，其中(1)(2)(4)(5)(7)(8)是图像，它们均带有最常见的那种拓扑:

(1) A, B;　　(2) E, F;　　(3) S^2, S^3;

(4) O, P;　　(5) U, W;　　(6) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$;

(7) 4, 5;　　(8) 　　(9) $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$

哪组的两个拓扑空间：

(1) 同胚：

(2) 不同胚但同伦等价：

(3) 不同伦等价但基本群相同：

(4) 基本群不同：

2. 给出以下8个拓扑空间，它们均带有最常见的那种拓扑:

(1) $\mathbb{T}^2\sharp\mathbb{T}^2$,　　(2) $\{(x,y)|x=0\ or\ y=\sin(1/x),\ x>0\}$,

(3) $B(0,1)$,　　(4) $\{(x,y)|y=0\ or\ x\in\mathbb{N}\}$,

(5) $S^2\wedge S^2$,　　(6) $\mathbb{R}^2\backslash C$, C为一段弧,

(7) $\mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2$,　　(8) $\mathbb{R}^2\backslash J$, J为一段约当曲线。

满足如下性质的分别有：

(1) 可缩：

(2) 单连通但不可缩：

(3) 道路连通但不单连通：

(4) 连通但不道路连通：

(5) 不连通：

四、举例子（每题3分，共15分）

1. 第一可数但不第二可数的拓扑空间

2. 极限点紧(limit point compact)但不紧的空间

3. $\mathbb{R}^n$的局部有限的球覆盖

4. 构造度量空间中的一个闭球B和连续映射$f:B\to B$使得f没有不动点。

5. 具有相同欧拉示性数但不同胚的两个紧曲面。

五、（15分）设$X\subset\mathbb{R}^n$是非空的中心对称子集，即$x\in X\Leftrightarrow -x\in X$. 定义$d:X\times X\to\mathbb{R}$如下：

$$d(x,y)\leq\max\{d_E(x,y),d_E(-x,y),d_E(x,-y)d_E(-x,-y)\},$$

其中d_E是指欧氏度量下的距离函数。

（1）d是否为X上的度量？证明你的结论。

（2）设$\mathcal{T}$是X上由集合族$\{B_r(x):=\{y|d(x,y)<r\}\}$生成的拓扑，问$\mathcal{T}$是否第二可数？是否Hausdorff？证明你的结论。

（3）在X上定义等价关系$x\sim y\Leftrightarrow d(x,y)=0$. 定义商空间$X_0:=X/\sim$赋予商拓扑$\mathcal{T}_0$. 请构造$X_0$上的度量，使其生成的度量拓扑正好是$\mathcal{T}_0$.

六、（20分）

设$(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$是拓扑空间。

(1) 构造$X\times Y$上的乘积拓扑。

(2) 证明：若$X\times Y$是紧的，则X是紧的。

(3) 证明：若$X\times Y$是Hausdorff的，则X是Hausdorff的。

(4) 设A,B分别为X,Y的子集，证明：$\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$.

七、（15分）

对$x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$，定义$S(x,r)$是以x为中心、r为半径的球面。对任意实数a，定义$p_a=(a,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$.

(1) 计算$X_2=S(p_1,1)\cup S(p_2,2)$的基本群;

(2) 计算$X_n=S(p_1,1)\cup\cdots\cup S(p_n,n)$的基本群;

(3) 计算$X_\infty=\bigcup_{n\geq1}S(p_n,n)$的基本群.

八、（20分）

1. 拓扑空间不连通的定义是什么？

2. 证明：X不连通当且仅当存在满射$f:X\to\{1,-1\}$(后者赋予离散拓扑).

3. 两个拓扑空间同伦等价的定义是什么？

4. 若X连通且和Y同伦等价，证明Y也是连通的。

九、（10分）改错题

Problem 9 (10 points).

Here is a simple proof of two-dimensional Brouwer fixed point theorem:

Theorem (Brouwer fixed point theorem for the two dimensional square).
Any continuous map $F : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ has a fixed point.

Proof. We first observe (by the intermediate value theorem) that

$\boxed{\textbf{Lemma: } \text{any continuous map } h : [0,1] \to [0,1] \text{ has a fixed point.}}$

Now write $F = (f, g)$, where both f and g are continuous functions from $[0,1]^2$ to $[0,1]$. For each $y \in [0,1]$, we define a function $\bar{f}_y : [0,1] \to [0,1]$ by $\bar{f}_y(x) = f(x,y)$. According to the Lemma above, there exists $a(y) \in [0,1]$ such that $\bar{f}_y(a(y)) = a(y)$, i.e. $f(a(y), y) = a(y)$ for any $y \in [0,1]$. Using the function $a(y)$ we can define another function $\bar{g} : [0,1] \to [0,1]$ by $\bar{g}(y) = g(a(y), y)$. Again according to the Lemma above, we can find $b \in [0,1]$ such that $\bar{g}(b) = b$, i.e. $g(a(b), b) = b$. It follows $F(a(b), b) = (a(b), b)$. In other words, the point $(a(b), b)$ is a fixed point of F. □

$\boxed{\textbf{Question:}}$ Is this proof correct or wrong? If you think this is correct, then generalize this proof to give a proof of the Brouwer fixed point theorem for n-dimensional cubes; if you think this is wrong, then point out the mistake in the proof <u>and</u> also provide a counterexample for which the proof fails.