

中国科学技术大学 2018-2019 学年第 2 学期

实分析 (H) 期中试题

整理: 邵锋 fshao99@gmail.com

1. (10 分) 证明 $\{(\sin x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的依测度收敛列.
2. (10 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是可导函数, 证明 f' 是 \mathbb{R} 上 Lebesgue 可测函数.
3. (10 分) 设 $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测函数. 证明存在多项式函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 φ_n 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处收敛于 f .
4. (15 分) 构造 \mathbb{R} 上的 Lebesgue 可测集 A , 使得 $m(A) > 0$, A 中不包含内点, A 的势与 Cantor 三分集的势相同.
5. (15 分) 设 G 是 \mathbb{R} 中的开集, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续点集不是 Borel 集. 证明 f 不是 Lebesgue 可测函数.
6. (20 分) 设 A 是 \mathbb{R} 上的 Lebesgue 可测集, $m(A) > 0$. 证明 A 中存在不可测的子集.
7. (10 分) 设 A 是 \mathbb{R} 中的 Cantor 三分集. 证明 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \in A\}$ 是 Borel 集.
8. (10 分) 下列说法是否正确 (说明理由):
 - (a) 设存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 与 f 在 \mathbb{R} 上几乎处处相等, 则 g 在 \mathbb{R} 上几乎处处连续.
 - (b) 设 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathbb{R} 上几乎处处连续, 则存在 $f \in C(\mathbb{R})$, 使得 g 与 f 在 \mathbb{R} 上几乎处处相等.