2019年春季学期复分析期末考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

主讲教师: 李皓昭（出卷）、胡森　考试时间：2019年6月19日 14:30-16:30

注：解答要求卷面整洁，计算结果尽可能化简

一、计算题（50分）

1. 将如下复数写成$z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$的形式：

$$1^{\sqrt{2}}, \tan i.$$

2. 计算积分

$$I=\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

3. 设$a>1$，用留数定理计算

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}.$$

4. 求下列函数在$\{z\in\mathbb{C}|0<|z|<1\}$和$\{z\in\mathbb{C}||z|>1\}$中的Laurent展开式：

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}.$$

5. 设$f(z)=e^{1/z}\cdot\frac{1}{1-z}$, 计算留数$\mathrm{Res}(f,0)$.

二、（10分）求将区域

$$\{Im\ z>0\}\backslash\{z=iy|0<y\leq 1\}$$

映为$\{-1<Im\ z<1\}$的共形映射。

三、（10分）求函数$e^{\tan(1/z)}$在$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上的所有奇点，并确定其类型，其中极点需要说明阶数。

四、（10分）求多项式$z^9+z^5-8z^3+2z+1=0$在$\{1<|z|<2\}$中的零点个数（计算重数在内）。

五、（10分）（1）叙述调和函数在圆盘上的Poisson公式，并用其证明：若$u(z)\geq 0$在$B(0,R)$上调和，则对任意$z\in B(0,R)$, 成立

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}u(0)\leq u(z)\leq\frac{R+|z|}{R-|z|}u(0).$$

（2）证明：复平面上取值为正的调和函数必是常数。

六、（10分）设$f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$是单叶全纯函数，并且满足$f(0)=0, f'(0)=1$, 证明：

$$\inf\{|w|:w\notin f(\mathbb{D})\}\leq 1.$$

并且等号成立当且仅当$f(z)=z$，$\forall z\in\mathbb{D}$.

七、（10分，附加题）设$a\in\mathbb{C},|a|<1$, 令

$$L(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.\ L_1:=L,\ L_{n+1}:=L\circ L_n\ \ \forall n\geq 1.$$

证明：函数列$\{L_n(z)\}$在单位圆盘$\mathbb{D}$中内闭一致收敛，并计算其极限函数。