2019年春季学期复分析期中考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

主讲教师: 李皓昭

注：解答要求卷面整洁，计算结果尽可能化简

一、（20分）计算积分

1.
$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2}, \quad |a| \neq r.$$

2.
$$\int_{|z|=2a} \frac{e^z}{z^2+a^2}, \quad a > 0.$$

二、（10分）求共形映射，将如下区域

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} | -\pi < Re\, z < \pi,\ Im\, z > 0\}.$$

映为上半平面。

三、（10分）设
$$f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}},$$
取$f(z)$在$[0,1]$的上岸为正值的单值全纯分支f_0. 计算$f_0(-i)$.

四、（10分）求如下函数在$\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$和$\{z \in \mathbb{C} | |z| > 2\}$中的Laurent展开式。

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

五、（10分）叙述Schwarz引理，并利用它证明如下结论：若f是单位圆盘$\mathbb{D}$上的全纯函数，$z_0 \in \mathbb{D}$, 则成立
$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|.$$

六、（10分）设$f(z)$在区域Ω上全纯，且$z_0 \in \Omega$, $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(z_0)$收敛，证明：

（1）$f(z)$是整函数；

（2）$\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(z)$在$\mathbb{C}$上内闭一致收敛。

七、（10分）求全体整函数$f(z)$使得$|f(z)| = 1\ \ \forall |z| = 1$.

八、（10分）设$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 证明：

（1）多项式$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$的全部零点都在$\{|z| < 1\}$内，且没有正实根。

（2）三角多项式$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots a_n \cos n\theta$在$(0, 2\pi)$中有$2n$个不同的零点。

九、（10分）若$f(z)$是单位圆盘$\mathbb{D}$上的全纯函数，证明：

$$2|f'(0)| \leq \sup_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z)-f(w)|,$$

且等号成立当且仅当$f(z) = a_0 + a_1 z$.