2019年春季学期 近世代数期末考试

2019年6月28日 14:30-16:30

上课教师：陈洪佳、许金兴

一、(12分) 设I, J_1, J_2, J_3是含幺交换环R的理想，如果有$R = I + J_1 = I + J_2 = I + J_3$，令$J = J_1 \bigcap J_2 \bigcap J_3$。证明：$I + J = R$。

二、 证明下列结论：（共18分）

1). 令$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$以及$\theta = \omega - \bar{\omega} = \sqrt{-3}$，证明：$\mathbb{Z}[\omega]/\langle\theta\rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

2). 域$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$同构于$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x+1\rangle$;

3). $\mathbb{R}[x]/\langle x^4+1\rangle$不同构于$\mathbb{C}$的子环。

三、(20分) 令$f(x)=x^4-5x^3-2x^2+2x-2\in\mathbb{Q}[x]$。

1). 求$f(x)$的一个有理数根；

2). 设$u\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$为$f(x)$的一个非有理数实根，求域扩张次数$[\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q}]$；

3). 将$(1+u)^{-1}$表示成$1,u$和u^2的$\mathbb{Q}$-线性组合。

四、(20分) 设p为奇素数。

1). **证明：** 存在$c\in\mathbb{F}_p$使得x^2-c为$\mathbb{F}_p[x]$中不可约多项式；

2). 设x^2-c_0为$\mathbb{F}_p[x]$中不可约多项式，把商域$F=\mathbb{F}_p[x]/\langle x^2-c_0\rangle$看成$\mathbb{F}_p$的域扩张，**证明：** 对任意$b\in\mathbb{F}_p$存在$\alpha\in F$使得$\alpha^2=b$。

五、(20分) p为素数，$q=p^m$，$\mathbb{F}_q$为q元有限域，设$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}_q[x_1,x_2,\ldots,x_n]$，记$N_q(f)$为集合$\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{F}_q^n \mid f(a_1,\ldots,a_n)=0\}$的元素个数。

1). 证明：在$\mathbb{F}_q$中有

$$\sum_{a\in\mathbb{F}_q} a^k=\begin{cases} q-1, & \text{如果 } q-1 \mid k, \\ 0, & \text{如果 } q-1 \nmid k. \end{cases}$$

2). 记$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{q-1}\in\mathbb{F}_q[x_1,x_2,\ldots,x_n]$，证明：在$\mathbb{F}_q$中有

$$N_q(f)=\sum_{a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}_q} g(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

3). 如果f的次数又满足$\deg f<n$，证明：$p\mid N_q(f)$。

六、(**20分**) 设P是含幺交换环R的素理想，并且P真包含于a生成的主理想$\langle a\rangle$。证明：

1). $P = aP$；

2). 如果P是有限生成的，则存在$b \in R$使得$(1-ab)P = 0$；

3). 如果P是有限生成的并且R是整环，则$P = 0$或者$\langle a\rangle = R$。