近世代数(H)期末考试

题目次序和难度无直接关系，请把解答写在试卷上，空间不够再另附答题纸。

一、(10分) 证明：
(1) 24 阶群非单。
(2) p^3q 阶群非单，其中p,q 为素数。

Proof. (1) 若单群G 满足$|G|=24$，根据$Sylow$定理，G 的$Sylow$ 2-子群个数为3 个，记为$\{P_1,P_2,P_3\}$，考虑G 在该集合上的共轭作用，诱导出非平凡群同态$f:G\to S_3$，因此$\mathrm{Ker}\,f$ 是G 的真正规子群，矛盾。
(2) 若单群G 满足$|G|=p^3q$.

- 若$p>q$，根据$Sylow$定理，G 的$Sylow$ p-子群个数为1 个，矛盾。
- 若$p=q$，则G 的中心非平凡，故G 非单群。
- 若$p<q$，根据$Sylow$定理，G 的$Sylow$ p-子群个数为q 个，G 的$Sylow$ q-子群个数为p^2 或p^3 个。
  1. 若G 的$Sylow$ q-子群个数为p^3 个，则q 阶元有$p^3(q-1)$ 个，剩下的p^3 个元素组成唯一的正规$Sylow$ p-子群。矛盾。
  2. 若G 的$Sylow$ q-子群个数为p^2 个，则$q|p^2-1,p|q-1$，那么$q|p+1,p|q-1$，因此$p=2,q=3$，化为第一问。

$\square$

二、(15分)(1)求群

$$G_{n_1,\cdots,n_r}=<x_1,x_2,\cdots,x_r|\forall 1\leqslant i,j\leqslant r,x_i+x_j=x_j+x_i,n_1x_1=n_2x_2=\cdots=n_rx_r>$$

的秩，不变因子以及初等因子，其中n_i 为正整数。
(2) 令$H=G_{36,36,36}$，求$\mathrm{Aut}\,H_t$，其中H_t 为H 的挠子群。
(3) 求$\mathrm{Aut}\,H$。

Proof. (1) 将生成关系改写为

$$\begin{pmatrix} n_1 & & & & \\ -n_2 & n_2 & & & \\ & -n_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & n_{r-1} & \\ & & & & -n_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ x_r \end{pmatrix}=O.$$

然后化为$Smith$ 标准形求不变因子即可，这里用行列式因子会更方便。矩阵秩为$r-1$，所有群的秩为1.

(2) $H_t \cong \mathbb{Z}_{36}^2 \cong \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_9^2$. 因此$\mathrm{Aut}(H_t) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{36}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_4) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_9)$.

(3) $H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{36}^2$，$\mathrm{Aut}(H) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) & \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z, H_t) & \mathrm{Aut}(H_t) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \\ \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_9^2 & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_4) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_9) \end{pmatrix}$ □

三、(15分) 设V 是域F 上的n 维列向量空间。令

$$X = \{(V_0, V_1, \cdots, V_n) | V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V, \dim V_i = i\},$$

定义$\mathrm{GL}_n(F)$ 在X 上的作用为$A \cdot (V_0, V_1, \cdots, V_n) = (AV_0, AV_1, \cdots, AV_n)$。

(1) 求$(W_0, W_1, \cdots, W_n)$ 的稳定子群，其中$W_i = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_i\}$，$e_i$ 为在i 处为1，其余为0 的列向量。

(2) 证明$\mathrm{GL}_n(F)$在X 上作用可迁。

(3) 求出$T_n(F)$ 在X 上作用的轨道的代表元系，其中$T_n(F)$ 为对角线元全为1 的上三角矩阵全体。

Proof. 可以用V 的一组基(必须要求基本身是全序集)来表示X 中的元素，但表示方式不唯一。这里用$A = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 表示X 中元素$(V_0, V_1, \cdots, V_n)$ 使得$V_i = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_i\}$.

(1) 可逆上三角矩阵。

(2) 略

(3) 答案是全体置换矩阵表示的X 中元素。它们在群$T_n(F)$ 作用下的不同轨道的证明略去。下面给出一种X 在哪个轨道中元素的算法:

找出A 的第一列最后一个非零元，不妨设这个非零元为1，设它在第i_1 行，则利用列变换把A 的第$i(i>1)$列的第i_1 个元素变为0，记为A_1 (这么做表达的元素仍为$(V_0, V_1, \cdots, V_n)$)，找出A_1 的第二列的最后一个非零元，不妨设这个非零元为1，设它在第$i_2 (i_2 \neq i_1)$ 行，则利用列变换把A 的第$i(i>2)$列i_2 个元素变为0，记为A_2，依次做下去，直到结束。则$(V_0, V_1, \cdots, V_n)$ 与$(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots)$ 在同一轨道。 □

四、(10分) 令$I_1, I_2, \cdots, I_r$ 为环R 的理想。定义映射

$$\varphi\colon M_n(R/(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_r)) \to M_n(R/I_1) \times \cdots \times M_n(R/I_r),$$
$$(a_{ij} + I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_r)_{n\times n} \mapsto ((a_{ij} + I_1)_{n\times n}, \cdots, (a_{ij} + I_r)_{n\times n}).$$

(1) 证明φ 为环的单同态，并且φ 为环同构当且仅当$I_i + I_j = R, \ \forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant r$。

(2) 若$I_1 \cap I_2 = 0, I_1 + I_2 = R$，则$\mathrm{GL}_n(R) \cong \mathrm{GL}_n(R/I_1) \times \mathrm{GL}_n(R/I_2)$。

Proof. (1) 略

(2) 取两边可逆元（即行列式值属于$R^{\times}$）再说明满射即可。 □

五、(20分) 设R 是含有单位元1 的环，G 为群。令

$$R[G] = \{\Sigma_{g\in G} \lambda_g g | \lambda_g \in R, \text{仅有有限个}\lambda_g \neq 0\}.$$

在$R[G]$ 上定义运算如下

$$\Sigma_{g\in G}\lambda_g g+\Sigma_{g\in G}\mu_g g=\Sigma_{g\in G}(\lambda_g+\mu_g)g,$$
$$\Sigma_{g\in G}\lambda_g g\cdot\Sigma_{g\in G}\mu_g g=\Sigma_{g\in G}v_g g\quad \text{其中}\ v_g=\Sigma_{g=g'g''}\lambda_{g'}\mu_{g''}.$$

(1) 证明在上述运算下$(R[G],+,\cdot)$ 成为一个含幺环。
(2) 证明$R[G]$ 为交换环当且仅当R 为交换环且G 为Abel 群。
(3) 求$\mathbb{C}[S_3]$ 的中心$Z(\mathbb{C}[S_3])$。
(4) 试阐述对一般的有限群G，$Z(\mathbb{C}[G])$ 与G 的共轭类之间的关系。

Proof. (1)(2)略
(3)(4)$\sum_{g\in G}\lambda_g g\in Z(\mathbb{C}[G])\Leftrightarrow$ 对任意的$h\in G,h\sum_{g\in G}\lambda_g gh^{-1}=\sum_{g\in G}\lambda_g g$.
左边$=\sum_{g\in G}\lambda_g(hgh^{-1})=\sum_{g\in G}\lambda_{h^{-1}gh}g$，所以$\lambda_{h^{-1}gh}=\lambda_g$.
即$\lambda_{g_1}=\lambda_{g_2}\Leftrightarrow g_1$ 与g_2 在同一个共轭类。 □

六、（20）分 令$f(x)=x^3+2x+4$. 设E 为$f(x)$ 在$\mathbb{Q}$ 上的分裂域。
(1) 证明$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 不可约。
(2) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为f 的三个根，求$D(f)=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2$，并求$\mathrm{Gal}(f)$。
(3) 求$E/\mathbb{Q}$ 的中间域。
(4) 证明存在无穷多个互不同构的三次Galois 扩张$K/\mathbb{Q}$。

Proof. (1) f 不可约当且仅当在$\mathbb{Z}$ 上无根，而它的根只可能为$\pm1,\pm2,\pm4$.
(2) 对于$f(x)=x^3+px+q$ 来说，$D(f)=-4p^3-27q^2=-464$.
$D(f)<0\Leftrightarrow\mathrm{Gal}(f)\cong S_3\Leftrightarrow f$ 有只有一个实根.
(3) $\mathbb{Q}(\alpha_i)\quad\mathbb{Q}(\sqrt(D(f)))=\mathbb{Q}(\sqrt(-29))$
(4) 不会，不可约多项式不同时，域扩张不一定不同构。 □

七、（10）分 将$x^8-1,x^{20}-1\in F_3[x]$ 分解为不可约多项式的乘积。

Proof. 由于F_{3^2} 的所有元素均满足$x(x^8-1)=x^{3^2}-x=0$，所以$x^{3^2}-x$ 分解为F_3 上所有一次、二次不可约多项式的乘积。
$x^8-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x-1)(x^2-x-1)$.
由于$x^{20}-1|x^{80}-1|x^{3^4}-1$，所以$x^{20}-1$ 分解为一些F_3 上一些一次、二次、四次不可约多项式的乘积。而$(x^{20}-1,x^8-1)=x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$，所以$x^{20}-1$ 的其他因子均为4 次不可约多项式。
$x^{20}-1=(x^{10}-1)(x^{10}+1)=(x^5-1)(x^5+1)(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^2+1)(x^4+x^3-x+1)(x^4-x^3+x+1)$.

$x^8-x^6+x^4-x^2+1=(x^4+x^3-x-1)(x^4-x^3+x-1)$ 的分解可能有些复杂，需要点计算量。 □