2019年春季学期微分方程2(H)期末考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

2019年6月6日 19:00-21:30 主讲教师: 赵立丰

注：每题20分，总分100分。前四题选做三题。若都做，则取三道分最高的计算成绩。最后两题是必做题。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

除特别说明以外，本试卷中的U均是指$\mathbb{R}^n$中的有界开集，并且边界光滑。

1. 令$Lu=-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u)$, 其中$a^{ij}\in C^\infty(\bar{U})$满足一致椭圆条件且$a^{ij}=a^{ji}$. 设$\lambda_1$是$L$的主特征值。证明：

$$\lambda_1=\min\{B[u,u]: u\in H_0^1(U), \|u\|_{L^2}=1\},$$

其中$B[\cdot,\cdot]$是与L对应的双线性型。

2. 设$f\in L^2(U), u_m=\sum_{k=1}^m d_m^k w_k$满足

$$\int_U \nabla u_m\cdot\nabla w_k dx=\int_U f w_k dx \quad \forall k=1,2,\cdots,m.$$

这里$\{w_k\}$是$H_0^1(U)$的一组标准正交基。证明：序列$\{u_m\}$存在子列，在$H_0^1(U)$意义下弱收敛到如下方程的弱解

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

3. 考虑热方程

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+c(t,x)u=f & \text{in } [0,\infty)\times\mathbb{R}^n\\ u=g & \text{on } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n,\end{cases}$$

其中

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,\infty)}\left(|c|,|\partial_{t,x}c|,|\partial_{t,x}^2 c|\right)<\infty.$$

这里$u:[0,T)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是未知函数。

请用不动点方法证明，对任意$T>0$，该方程存在解$u\in L^2([0,T);H^1(\mathbb{R}^n))$.

4. 令$Lu=-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u)+cu$, 其中$a^{ij}\in C^\infty(\bar{U})$满足一致椭圆条件且$a^{ij}=a^{ji}, c\geq 0$. 考虑双曲方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 u+Lu=0 & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } [0,T]\times\partial U\\ u=f,\partial_t u=g & \text{on } \{t=0\}\times U.\end{cases}$$

用半群方法证明解的存在性。

5. 设u是如下Klein-Gordon方程的光滑解:

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta u+\partial_t u=0 & \text{in } [0,\infty)\times U\\ u=0 & \text{on } [0,\infty)\times\partial U\\ u=f,\partial_t u=g & \text{on } \{t=0\}\times U.\end{cases}$$

(1)定义能量

$$E(t) = \int |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 dx,$$

证明$E'(t) \le 0$;

(2)证明：存在常数$C > 0$，使得对任意$t \ge 0$, 成立$\|u(t)\|_{L^2(U)} \le C$.

6. 设U连通且满足内球条件，令

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\partial_i u + c(x)u,$$

其中$a^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$满足一致椭圆条件且$c \ge 0$. 在边界$\partial U$上假设有$\alpha(x) \ge 0$.

现设$u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$是如下边值问题的解:

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = 0 & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

证明：

(1)若$c(x)$在U内部不恒为零，或者$\alpha(x)$在边界上不恒为零，则必有$u = 0$;

(2)若$c(x)$在U内部恒为零，且$\alpha(x)$在边界上恒为零，则必有u是常数.