# 中国科学技术大学数学科学学院
# 2018～2019 学年第 2 学期考试试卷
# A 卷

课程名称：线性代数 A1　　课程代码：001525

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

| 题号 | 1 (10 分) | 2 (10 分) | 3 (15 分) | 4 (15 分) | 5/6 (20 分) | 7/8 (30 分) | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

**说明：从 5、6 两题中选做一题，从 7、8 两题中选做一题，多做不得分.**

1．求所有实方阵 $A$ 使得 $A^{2019}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

2．设实方阵 $A$ 的特征多项式 $\varphi_A(x)=x^{2019}+x+1$．求 $A^2$ 的特征多项式.

3．设 $n$ 阶实方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&3&\cdots&n\\3&3&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{pmatrix}$．求 $\det A$ 和 $A^{-1}$.

4．设 $n$ 阶实方阵 $A$ 与 $A^{2019}$ 相抵．证明：存在可逆实方阵 $P,Q$ 使得 $A=P\begin{pmatrix}Q&O\\O&O\end{pmatrix}P^{-1}$.

5．设 $n$ 阶实方阵 $A$ 的特征方阵 $xI-A$ 与 $\operatorname{diag}((x^2+x)^3,(x^2-x)^4,I_{n-2})$ 模相抵.

（1）求 $A$ 的 Jordan 标准形.　　（2）求 $\operatorname{rank}(I_n\otimes A-A\otimes I_n)$.

6．设 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 上的线性变换 $\mathscr{A}(X)=AX-XA$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

（1）求 $\mathscr{A}$ 的所有特征值及其特征向量.　（2）求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

7．设 $A,B$ 都是 $n$ 阶实方阵.

（1）证明：若 $A,B$ 无公共特征值，则存在唯一的实方阵 $X$ 使得 $AX-XB=I$.

（2）证明：$A$ 与 $B$ 正交相抵当且仅当 $A^TA$ 与 $B^TB$ 正交相抵.

（3）设 $P$ 是正交方阵，求 $\|PA-B\|_F$ 的最小值，其中 $\|X\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}x_{ij}^2}$.

8．设 $\alpha=2^{\frac{1}{3}}$，$V=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbf{Q}[x]\}$.

（1）证明：$V$ 在实数运算下构成 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间，并且 $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ 是 $V$ 的基.

（2）求 $\beta=3\alpha^2+2\alpha+1$ 在 $V$ 的基 $\{1,\alpha^2+1,\alpha^2+3\alpha+3\}$ 下的坐标.

（3）求 $V$ 上线性变换 $\mathscr{A}(v)=(\alpha+1)v$ 的特征多项式.

（装订线内不要答题）

# 参考答案

1．$A$ 的特征值 $\lambda,\bar{\lambda}$ 满足 $\lambda^{2019}=i$．可设 $A=P\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}P^{-1}$，$\theta=\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{2019}$，$k\in\mathbf{Z}$．

由 $A^{2019}=P\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，得 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$．

2．设 $\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{2019})$，$B=A^2$，则 $\varphi_B(x)=(x-\lambda_1^2)\cdots(x-\lambda_{2019}^2)$．

由 $\varphi_B(x^2)=-\varphi_A(x)\varphi_A(-x)=x^{4038}+2x^{2020}+x^2-1$，得 $\varphi_B(x)=x^{2019}+2x^{1010}+x-1$．

3．设 $P=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$，则 $QPAP^TQ^T=\begin{pmatrix}n & \\ & -I_{n-1}\end{pmatrix}$．

故 $\det A=(-1)^{n-1}n$，$A^{-1}=(QP)^T\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & \\ & -I_{n-1}\end{pmatrix}QP=\begin{pmatrix}-1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -2 & 1\\ & & & 1 & \frac{1-n}{n}\end{pmatrix}$．

4．$A=P_1\begin{pmatrix}Q & R\\ O & O\end{pmatrix}P_1^{-1}$，其中 $\begin{pmatrix}Q & R\end{pmatrix}$ 行满秩，$Q$ 是方阵．由 $A^{2019}=P_1\begin{pmatrix}Q^{2019} & Q^{2018}R\\ O & O\end{pmatrix}P_1^{-1}$ 与 $A$ 相抵，得 $\begin{pmatrix}Q^{2019} & Q^{2018}R\end{pmatrix}$ 行满秩，$Q$ 可逆．故 $A=P\begin{pmatrix}Q & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}$，$P=P_1\begin{pmatrix}I & -Q^{-1}R\\ O & I\end{pmatrix}$．

5．$n=14$．$xI-A$ 与 $\mathrm{diag}((x+1)^3,(x-1)^4,x^3,x^4,I_{10})$ 模相抵．

（1）$A$ 的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(J_3(-1),J_4(1),J_4(0),J_3(0))$．

（2）$\mathrm{rank}(I_n\otimes A-A\otimes I_n)=\mathrm{rank}((A+I)^3,(A-I)^4,A^4,A^3)+140=176$．

6．$\mathscr{A}:\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_3 & x_4-x_1\\ 0 & -x_3\end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

（1）$\varphi_A(x)=x^4$，特征值 0 的特征向量 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 0 & x_1\end{pmatrix}$，$x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 不全为 0．

（2）$A^2\neq O$，$A^3=O\Rightarrow d_A(x)=x^3$．

7．（1）$A,B$ 无公共特征值 $\Rightarrow\varphi_B(A)$ 可逆．$AX-XB=I$ 有唯一解 $\Leftrightarrow AX-XB=O$ 有唯一解．$AX=XB\Rightarrow\varphi_B(A)X=X\varphi_B(B)=O\Rightarrow X=O$．

（2）$A^TA$ 的奇异值 $=A^TA$ 的特征值 $=A$ 的奇异值的平方．

（3）$\|PA-B\|_F^2=\|A\|_F^2+\|B\|_F^2-2\,\mathrm{tr}(PAB^T)$．设 $U\Sigma V$ 是 $AB^T$ 的奇异值分解．当 $P=V^TU^T$ 时，$\mathrm{tr}(PAB^T)=\mathrm{tr}(VPU\Sigma)$ 取得最大值 $\mathrm{tr}\,\Sigma$，$\|PA-B\|_F$ 取得最小值 $\sqrt{\|A\|_F^2+\|B\|_F^2-2\,\mathrm{tr}\,\Sigma}$．

8．（1）易验证 $V=\{a+b\alpha+c\alpha^2\mid a,b,c\in\mathbf{Q}\}$ 构成 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间．由 $x^3=2$ 在 $\mathbf{Q}$ 中无解，得 $p=x^3-2$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约．若 $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ 线性相关，则存在非零多项式 $f\in\mathbf{Q}_3[x]$ 使得 $f(\alpha)=0$，与 $p$ 不可约矛盾．因此，$\{1,\alpha,\alpha^2\}$ 线性无关，构成 $V$ 的基．

（2）$\beta=-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}(\alpha^2+1)+\frac{2}{3}(\alpha^2+3\alpha+3)$．故 $\beta$ 的坐标是 $(-\frac{10}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3})$．

（3）$\mathscr{A}\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$．$\varphi_{\mathscr{A}}(x)=(x-1)^3-2$．