USTC概率论期中试题 2019年11月11日

姓名：　　　　学号：　　　　分数：

1. 掷2颗均匀骰子两次，每次出现点子的花样相同的概率多大？在下列情形分别求之：(1) 骰子可分辨; (2) 骰子不可分辨.

8+7

2. 给出$[0,1]$上一个概率空间，并回答其上子集$A_1 = [a_1, b_1]$, $A_2 = [a_2, b_2]$ $(a_1 \le a_2)$何时独立？

9+6

3. 独立重复伯努利试验中，p为每次试验成功的概率，S_n表示第n次成功时试验次数，试求 (1)在$S_n = j$条件下S_{n+1}的条件概率分布; (2) 在$S_{n+1} = k$条件下S_n的条件概率分布.

10+10

4. 设$S_N = X_1 + \cdots + X_N$为N个相互独立随机变量之和，其中每个随机变量等概率地取值$1, 2, \ldots, m$. 求
(1)S_N概率母函数; (2) 关于k的序列$P(S_N \le k)$的母函数; (3) 又设N为参数为$p \in (0,1)$的几何分布, 且N与$\{X_j : j = 1, 2, \ldots,\}$ 独立, 试回答(2)中问题.

5+8+7

5. 离散型随机向量$(X_1, \ldots, X_N) \in \{-1, 1\}^N$联合分布列为$\frac{1}{Z_N} e^{-\beta H_N}$, 这里

7+4+4

E

$$H_N = -\sum_{i=1}^{N} x_i x_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} x_i,$$

并约定$x_{N+1} = x_1$, $\beta > 0, h \in (-\infty, \infty)$. 回答

EX_1X_{1+k}

(1) 计算配分函数Z_N; (2) 试求$\mathbb{E}(X_i)$，并对固定k探讨极限$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}(X_1, X_{1+k})$.

6. S_n表示直线上从原点出发的简单对称随机游走，当$S_{n-1}S_{n+1} < 0$时称在时刻n有一个符号变换.令X_n表示到时刻$2n+1$为止符号变换的次数. 试证明

+8

$r=1$ 6 , -k 2

(1)$P(X_n = 0) = 2P(S_{2n+1} = 1)$; (2)进一步对所有$r \ge 1$有$P(X_n = r) = 2P(S_{2n+1} = 2r+1)$.