2019年秋季学期概率论（数学学院）期末考试

主讲教师：刘党政

整理人：章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

2020年元月7日　14:30-16:30

1、设随机变量X, Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

求条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$和条件期望$\mathbb{E}[X|Y]$.

2. 若随机变量X, Y独立同分布于正态分布$N(0,1/2)$, 则称$Z := X+iY$服从标准复高斯分布。

(1) 证明: $\mathbb{E}(Z^K\bar{Z}^l)=k!\delta_{kl}$;

(2) 若Z_1, Z_2独立同分布于标准复高斯分布，请计算Z_1/Z_2的密度函数。

3. X_n, X, Y均为同一概率空间上的随机变量。若$X_n \xrightarrow{D} X$, $X_n \xrightarrow{D} Y$. 问: (1) X, Y是否几乎处处相等？ (2) X, Y是否同分布？

4. 设随机变量X服从参数为正整数n的泊松分布。请选择合适的正数数列$\{a_n\}, \{b_n\}$使得

$$\frac{X-a_n}{b_n}\xrightarrow{D} N(0,1), \quad as\ n\to\infty.$$

5. 设随机变量列$X_, \cdots, X_n$服从参数为1的指数分布.

(1) 证明: $(X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}\xrightarrow{a.s.}$某个正常数$C>0$;

(2) 求$n/(X_1^{-1}+\cdots X_n^{-1})$的极限分布.

6. 设$A_n := (a_{ij})_{i,j=1}^n$是实对称的随机矩阵，各元素$a_{ij}$独立，且与某个随机变量$Y$同分布。假设$Y$的所有奇数阶矩都是0，所以偶数阶矩$M_{2j} := \mathbb{E}[Y^{2j}]$都存在。令$X_{n,k} := Tr((\frac{A_n}{\sqrt{n}})^k)$.

(1) 计算$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{n,3}^2]$; (2) 证明：对任意$\delta>0.5$, 均有$n^{-\delta}X_{n,3}\xrightarrow{a.s.}0$.