中国科学技术大学

2018−2019学年第一学期期终考试试卷

考试科目：数学分析A1　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共七道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, 写在草稿纸上无效.

2019 年 1 月 11 日

一、(每小题8分)叙述和计算题(给出必要的计算步骤)

得分	

1 叙述带积分余项的Taylor展开公式.

设函数 $f(x)\in C^{n+1}((a,b))$,则对固定的$x_0\in(a,b)$,有 $\cdots$ 1.5分

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x) \quad \cdots 2.5分$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\underbrace{\int_{x_0}^{x}}_{1.5分}\underbrace{(x-t)^n}_{1.5分}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{1.5分}dt \qquad x\in(a,b) \quad \cdots$ 4分

写成 x_0-t、$t-x$. $t-x_0$

注：由wiki，将条件加强至 $f(x)\in C^n((a,b))$且 $f^{(n+1)}(x)\in R[a,b]$ 也正确。

2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.　(算错至少-3)

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x^2\ln\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x^2\ln\left(1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{6}\right)=e^{-\frac{1}{6}}$$

3 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+\sin n}{n^2+k^2}$.　(算错至少-3)

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{\sin n}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\arctan x\Big|_0^1$$

$$=\arctan 1$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

4 计算无穷积分$\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$. (算错至少扣3分)

原式 $=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2-1)^2}d(x^2-1)$

$=-\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\ln x\, d\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^2-1}\Big|_2^{+\infty}-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{x}dx\right)$

$=\frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{2}\quad \cancel{\tfrac{1}{2}\ln(x-1)}\ \ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Big|_2^{+\infty}$

$=\frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3$

5 求方程$\begin{cases}x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t\end{cases}$ $(a>b>0,c^2=a^2-b^2,0\le t\le 2\pi)$所表示曲线的弧长. (微分几何入门)

$dx=-3\frac{c^2}{a}\cos^2 t\sin t\,dt$ 1分

$dy=3\frac{c^2}{b}\sin^2 t\cos t\,dt$ 1分

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ 1分

$=3c^2\sin t\cos t\sqrt{\frac{\sin^2 t}{b^2}+\frac{\cos^2 t}{a^2}}\,dt$ 1分

$\frac{1}{4}$弧长: $l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds(t)$ 对称性2分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3c^2\sin t\cos t\sqrt{\frac{\sin^2 t}{b^2}+\frac{\cos^2 t}{a^2}}\,dt$ …… 1分

$\xlongequal{u=\sin^2 t}\frac{3}{2}c^2\int_0^1\sqrt{\frac{u}{b^2}+\frac{1-u}{a^2}}\,du$ …… 1分

$=\frac{\frac{3}{2}c^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)u+\frac{1}{a^2}}\,d\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)u+\frac{1}{a^2}\right]$

$=\frac{3c^2}{2(b^{-2}-a^{-2})}\int_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{1}{b^2}}\sqrt{t}\,dt$

$=\frac{c^2}{b^{-2}-a^{-2}}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{1}{b^2}}$

$=\frac{c^2}{b^{-2}-a^{-2}}\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}\right)$ $\therefore \gamma=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$

$=\frac{c^2(a^3-b^3)}{ab(a^2-b^2)}=\frac{a^3-b^3}{ab}$ $\cancel{\therefore\gamma=\frac{4c^2(a^3-b^3)}{ab(a^2-b^2)}}$ …1分

二、(10分) 得分

设$[0,1]\bigcap\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\cdots r_n,\cdots\}$, 其中$\mathbb{Q}$表示有理数集, $f_n(x)=\chi_{\{r_1,r_2,\cdots r_n\}}(x)$,

其中$\chi_A(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\in A\\ 0\ ,\ x\overline{\in}A\end{cases}$, 问下式是否成立(需说明理由):

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx\ ?$$

(注:此处的积分是普通的黎曼积分)

设$x\in[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 为 Dirichlet 函数 …4分

$\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ ~~数~~不可积 …3分

故右边式子不存在, 自然不成立。 …4分

注: 写成立的至多4分 (一般 1~2分)(与前面的评分标准无关)

Dirichlet 写错扣 0.5分 (写成 D函数也行啊…)

称左边式子不存在的, 倒扣5分。

三、(10分) 得分

设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 其中$\mathbb{R}$表示实数集, $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}\ ,\ x\in(0,1]\\ 0\ ,\qquad x=0\end{cases}$,

(1) 问当且仅当α,β取何值时, $f(x)$在区间$[0,1]$上黎曼可积(需说明理由)? 7分

(注:此处的黎曼可积是普通的黎曼可积, 不包含广义黎曼可积)

(2) 问当且仅当α,β取何值时, $f(x)$在区间$[0,1]$上有原函数(需说明理由)? 3分

(1) $f(x)$在$[0,1]$上Riemann可积

$\Leftrightarrow$ $f(x)$有界 且 $f(x)$的不连续点集为零测集 …2分

而 $f(x)$在$(0,1]$上连续 …1分

故$f(x)$在$[0,1]$上Riemann可积$\Leftrightarrow f(x)$有界

当 $\alpha\geq0$时, $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)|\leq1$ 有界; …1分

当 $\alpha<0$ ~~时~~: $\beta\geq0$时, $f(x)$无界 …1分

$\beta\leq0$时 $\begin{cases}\alpha-\beta\geq0 & 有界\\ \alpha-\beta<0 & 无界\end{cases}$ …1分

β \ α	>0	=0	<0	
>0	有界✓	有界	无界	
=0	有界✓	有界✗	无界✗	
<0: $-\beta$	有界✓	有界✓	$\alpha-\beta\geq0$ 有界✓ ($\alpha-\beta>0$)	$\alpha-\beta<0$ 无界✗ ($\alpha-\beta\leq0$)

(2) $f(x)$在$[0,1]$上有原函数, 则$\exists F(x)$在$[0,1]$上可导, …1分

且 $F'(x)=f(x)$, 故 $f(x)$具有介值性。(不满足:✗)

而若$f(x)$在$[0,1]$上连续, 则f必有原函数(✓) …1分

故上述 $\beta\leq0$ 的情况已全部被确定。 …1分

当$\beta>0,\alpha\leq0$时 令 $G(x)=\begin{cases}-\int_x^1 f(t)dt & 0<x\leq1\\ -\lim\limits_{y\to0^+}\int_y^1 f(t)dt & x=0\end{cases}$

只需说明①$G(0)$存在? ②当 $\beta>0$, $\alpha\leq0$时, $G_+'(0)$是否为0, i.e 是否有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\left(\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 f(t)dt-\int_x^1 f(t)dt\right)$$

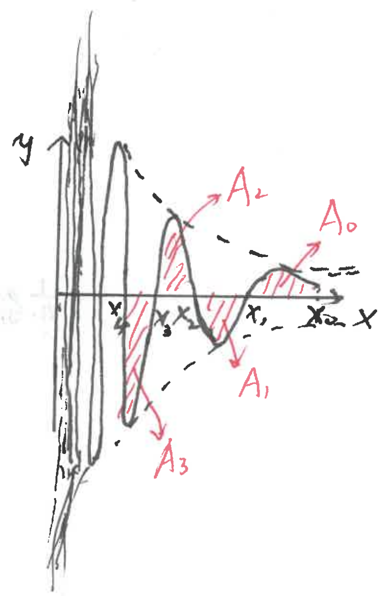
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\lim_{y\to 0^+}\int_y^x f(t)dt\right)=0\ ?$$

对于 ①，存在两种方法.

Method 1. 使用反常积分的敛散性判别法。

Method 2. 记 $x_0=1$，将 $f(x)$ 的零点从大到小排列（思考：为什么可以这样做？），记为 $\{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$

记 $A_i=\int_{x_i}^{x_{i-1}} f(x)\,dx$，则



$$\int_y^1 f(t)dt \text{ 收敛} \overset{(*)}{\underset{\text{思考}}{\Longleftrightarrow}} \lim_{n\to+\infty}\int_{x_n}^{x_0} f(x)dx \text{ 存在}$$

$$\Longleftrightarrow \text{级数 } \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 收敛} \quad \left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} A_i \text{ 存在}\right)$$

当 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ 收敛时，必有 $\lim_{n\to+\infty} A_n=0$，此时的 α,β 满足：…

若 $\{|A_n|\}$ 单调递减，则可以由 Dirichlet 判别法（闭区间套定理）得知 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ 收敛。而 α,β 满足… 时 $\{|A_n|\}$ 单调递减。

剩下的情况…

对于②，可以尝试 Method2 的思路。

四、(10分)

得分	

设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，

证明：$a=0$.

五、(10分)

得分	

设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且满足$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}xf(x)$ $(\forall x>0)$.

证明：$f(x)=cx$(c 是常数).

六、(10分)

得分	

设$f(x)$在$[-1,1]$上连续，证明: $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)=\pi f(0)$.

七、(10分)

得分	

设$f(x)$在$[0,1]$上具有连续的导函数，且$f(0)=f(1)=f(\frac{1}{2})=0$，满足

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\frac{1}{12}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\ .$$

证明: $f(x)\equiv 0$.