2018年秋季学期 泛函分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2019年1月15日 08:30-10:30 主讲教师: 黄文

1、（10分）设$y(t) \in C[0,1]$是一个给定的函数，求证如下积分方程存在唯一解$x(t) \in C[0,1]$.

$$x(t) - \frac{e^t}{3}\int_0^t x(s)ds = y(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

2、（20分）设$\{e_n\}_1^\infty$是Hilbert空间H中的正交规范集，$\{b_n\}_1^\infty$是一列实数。证明：

(1)$b_n e_n \rightharpoonup 0$ 当且仅当 $\sup_n |b_n| < +\infty$;

(2)$\{b_n e_n\}_1^\infty$是H中的完全有界集，当且仅当$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

3、（10分）设X, Y是Banach空间，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$且是单射。证明: $T^{-1} : R(T) \to X$是连续的，当且仅当T是闭值域算子。

4、（15分）求证：$L^4[0,1]$中的非空子集A有界，当且仅当：对A中的任何序列$\{f_n\}$，必存在子列$\{f_{n_k}\}$和函数$f \in L^4[0,1]$使得

$$\int_0^1 f_{n_k}(t)g(t) \to \int_0^1 f(t)g(t)dt. \ \ \forall g \in L^{4/3}[0,1].$$

5、（15分）在复Hilbert空间l^2上定义如下算子：

$$T : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (\frac{3x_1 + x_2}{2}, \frac{4x_2 + x_3}{3}, \cdots, \frac{(n+2)x_n + x_{n+1}}{n+1}, \cdots).$$

(1)证明T是有界线性算子;

(2)求T的谱、谱半径。

6、（20分）设X是实Banach空间，M是X的有限维子空间。

(1)求证：存在X的闭线性子空间N,满足$X = M \oplus N$.

(2)若A, B是X的两个互不相交的非空闭凸集，且$B \subseteq M$，证明：存在非零连续线性泛函$f \in X^*, s \in \mathbb{R}$，使得超平面$H_f^s$分离$A, B$，即：$f(x) \le s(\forall x \in A), f(x) \ge s(\forall x \in B)$.

7、（10分）设X是Banach空间，$T : X \to X^*$是线性算子，$D(T) = X$。若$\langle T(x), x\rangle := T(x)(x) \ge 0$对任意$x \in X$都成立，证明$T$有界。