2018年秋季学期 微分几何(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2019年1月17日 14:30-16:30 主讲教师: 张希

1、（12分）曲面Σ的第一基本形式为

$$I = \frac{1}{x^2+y^2+1}(dx^2+dy^2).$$

计算其Gauss曲率。

2、（16分）设曲面Σ上以点p为中心，r为半径的测地圆周长为$L(r)$, $K(p)$为p处曲面的Gauss曲率。证明：

$$K(p) = \lim_{r\to 0+} \frac{3}{\pi}\cdot\frac{2\pi r - L(r)}{r^3}.$$

3、（14分）曲面Σ有第一基本形式$I = dx^2 + G(x,y)dy^2$, 且$G(O,y)=1, \partial_x G(0,y)=0$对任意$y$恒成立。若该曲面的Gauss曲率是正常数，求证：$\Sigma$上每一条$y$-线（即$x$为常数）具有常测地曲率。

4、（10分）设C是曲面Σ上的一条光滑闭曲线，围成单连通区域Ω. Σ上幺正标架为$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, 其中$\vec{e}_3$是法向量。$\vec{v}(s)$是沿着$C$定义的单位曲面切向量场。若$\vec{v}(s)$与$\vec{e}_1$的夹角$\theta$是常数，请证明：

$$\int_C \langle\frac{D\vec{v}}{ds}, \vec{e}_3\times\vec{v}\rangle ds = -\int\int_\Omega K dA.$$

5、（10分）设C为曲面Σ上的一条光滑曲线，其曲率处处非零、若C既是测地线，又是曲率线，证明它必定是平面曲线。

6、（12分）设Σ是E^3中的可定向曲面，$\vec{r}$是位置向量。在曲面上取局部幺正标架场$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, 其中$\vec{e}_3$是法向量。求证：如下函数可以在$\Sigma$上被整体定义：

$$\Phi := \langle\vec{r},\vec{e}_1\rangle\omega_2^3 - \langle\vec{r},\vec{e}_2\rangle\omega_1^3.$$

7、（26分）设Σ是E^3中的无边紧曲面，K为其Gauss曲率。

（1）若存在$f\in C^\infty(\Sigma)$，使得$K=\Delta_\Sigma f$，求证：Σ同胚于环面；

（2）若Σ为凸曲面，求证$K\geq 0$处处成立；

（3）若Σ为凸曲面，$\phi\in C^\infty(\Sigma)$，求证：不存在$\eta\in C^\infty(\Sigma)$, 使得

$$\Delta_\Sigma\eta + \langle\nabla\phi,\nabla\eta\rangle = K.$$