2017年春季学期实分析(H)期中考试

整理人：章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

主讲教师：任广斌

1.(10分) 设$E \subset \mathbb{R}$, 证明或否定：E零测当且仅当它至多可数.

2.(10分) 设f在$[0,1]$上单调递增, 求证: 存在数列$\{x_n\} \subseteq [0,1]$, 使得

$$m(f([0,1])) = \sum_{n=1}^{\infty}(f(x_n+) - f(x_n-)).$$

3,(15分) 设f为$\mathbb{R}$是实值函数, 令

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x} f(y)\text{存在}\}.$$

求证E是G_δ集.

4.(10分) 设$E \subset \mathbb{R}$可测, $m(E) = 2017$, 求证存在2017个互不相交的可测集$\{E_j\}_1^{2017}$, 使得

$$E = \bigcup_{j=1}^{2017} E_j,\ \ m(E_1) = \cdots = m(E_{2017}) = 1.$$

5.(10分) 设$f \in C(\mathbb{R})$, 求证: $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$是$\mathbb{R}^2$中的零测集.

6.(10分) 设f为$\mathbb{R}$是实值函数，求证: f可测当且仅当存在多项式列$\{f_n\}$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f \ \ as\ n \to \infty$.

7.(20分) 设$f \in C(\mathbb{R})$, 求证:

(1)

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

是$\mathbb{R}$上的可测函数;

(2)$D := \{x : f'(x)\text{存在}\}$是可测集.

8.(15分) 设$E \subseteq \mathbb{R}$是可测集且测度有限, $f, \{f_n\}$都是E上的可测函数, 且$f_n \xrightarrow{a.e.} f \ \ as\ n \to \infty$. 求证：对任意的$\delta > 0$, E中存在满足$m(E_\delta) < \delta$的可测子集E_δ, 使得

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*, x \in E - E_\delta} |f_n(x)| < \infty.$$