2017年春季学期代数几何试题

共五道题，每题20分。

1. 设U_1 和U_2 均为概型X 的开子概型，并且满足$U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $X = U_1 \cup U_2$.

   证明：有环同构：$\mathcal{O}_X(X) \simeq \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$.

2. 设X 为Noether 概型，Y 为X 的闭子集。定义X 的理想层$\mathcal{I}_Y$ 如下：对X 中任一开子集U，$\mathcal{I}_Y(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) | \forall y \in Y \cap U, f(y) = 0\}$. 其中$f(y) \in \kappa(y)$ 看做f 在点y 处的取值。

   证明：$\mathcal{I}_Y$ 为凝聚(coherent) $\mathcal{O}_X$-模层。

3. 设X 为Noether 概型。

   (1) 证明：如果X 上的两个coherent $\mathcal{O}_X$-模层$\mathcal{F}$ 和$\mathcal{G}$ 均由整体截面生成(generated by global sections)，则$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ 也由整体截面生成。

   (2) 证明：如果$\mathcal{L}_1$ 和$\mathcal{L}_2$ 均为X 上的ample invertible sheaf, 那么$\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2$ 也是X 上的ample invertible sheaf。

4. 设k 为域。

   (1) 设$\mathcal{F}$ 为$\mathbb{A}^1_k = Speck[X]$ 上的秩为r 的局部自由$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$- 模层。

   证明：$\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}^r_{\mathbb{A}^1_k}$ 为秩r 的自由$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$-模层。

   (2) 设$\mathcal{F}$ 为$\mathbb{P}^1_k$ 上的秩为r 的局部自由$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$-模层。

   证明：$\mathcal{F} \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(a_i)$ 为r 个可逆层的直和。

5. 设X 为一个n 维光滑复射影簇，我们称X 为Calabi-Yau 簇，如果$dimH^n(X, \mathcal{O}_X) = 1$, 并且$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, \forall 0 < i < n$.

   证明：对于正整数$d \geq 2$, $n \geq 1$, 复射影空间$\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 中的不可约光滑d 次超曲面为Calabi-Yau 簇当且仅当$d = n + 2$.