中国科学技术大学
2017年春季学期微分方程II期中考试
参考答案与评分标准

2017年4月21日

1. (20分) 证明以下不等式:

(1)设$1 < p, p' < +\infty$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. 证明: 对任意正数a, b, 成立不等式

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

(2)设$1 \le p, p' \le +\infty, p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. $f \in L^p(U), g \in L^{p'}(U)$. 证明:

$$\int_U |fg| dx \le \|f\|_{L^p(U)} \|g\|_{L^{p'}(U)}.$$

证明: (1)注意到函数$f(x) = e^x$是$\mathbb{R}^n$上的凸函数, 那么有如下不等式:

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'}} \le \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{p'} e^{\log b^{p'}} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

(2)若p, p'中有一个是1一个是$+\infty$, 那么结论是显然的.

若$\|f\|_p, \|g\|_{p'}$中有一个是0, 那么说明该函数几乎处处为0, 从而原不等式两边都是0, 显然成立.

若$1 < p, p' < +\infty$, 不妨设$\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$(否则考虑$\frac{f}{\|f\|_p}, \frac{g}{\|g\|_{p'}}$). 那么由(1), 就有:

$$|fg| \le \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'}.$$

两边积分即可.

□

评分标准: 每一问10分. 第二问若只考虑了p, p'中有一个是1有一个是∞, 酌情得1-2分. 第二问没有考虑$\|f\|_p, \|g\|_{p'}$中有一个是0的情况, 扣1分.

2. (45分) 设$f: U \to \mathbb{R}$是局部可积函数, 证明以下光滑子的性质:

(1)$f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$;

(2)$f^\epsilon \to f$ a.e. as $\epsilon \to 0$;

(3)若$f \in C(U)$, 则对任意$V \subset\subset U$, 在V上成立f^ϵ一致收敛于f.

证明：

(1) 首先证明一阶偏导数存在, 计算差商如下:

固定任一点$x \in U_\epsilon$, 任取$i \in \{1, \cdots, n\}$. 那么对$|h|$充分小, $x + he_i \in U_\epsilon$. 对某些$V \subset\subset U$, 有

$$\begin{aligned}\frac{f^\epsilon(x+he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) f(y)dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) f(y)dy.\end{aligned}$$

注意到, 对任意$y \in V$,

$$\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) \to \frac{1}{\epsilon}\partial_i\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = \epsilon^n \partial_i \eta_\epsilon(x-y).$$

又因为被积函数

$$\left|\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) f(y)\right| \le \frac{1}{\epsilon}\|D\eta\|_{L^\infty}|f| \in L^1(V).$$

那么由控制收敛定理, 就有

$$\partial_i f^\epsilon(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f^\epsilon(x+he_i) - f(x)}{h} \exists = \int_U \partial_i\eta_\epsilon(x-y)f(y)dy = (\partial_i\eta_\epsilon * f)(x).$$

又因为, 上述表达式表明f^ϵ的各个一阶偏导数存在**且连续**, 所以$f^\epsilon \in C^1(U_\epsilon)$. 类似可得, 任意阶偏导$\partial^\alpha f^\epsilon$在$U_\epsilon$中存在且连续, 所以$f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

(2) 直接计算可得, 对任意$x \in U$.

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x) - f(x)| &= \left|\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)(f(y)-f(x))dy\right| \\ &\le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(y)-f(x)|dy \\ &\le C\frac{1}{|B(x,\epsilon)|}\int_{B(x,\epsilon)} |f(x)-f(y)|dy.\end{aligned}$$

据Lebesgue微分定理, 对a.e. $x \in U$, 当$\epsilon \to 0$时, 都有上式$\to 0$.

(3) 若$f \in C(U)$, 那么f在U的任意紧子集V上一致连续. 于是, 对任意$\delta > 0$, 存在$\eta > 0$, 使得对任意$|x-y| < \eta$, 都有$|f(x) - f(y)| < \delta (\forall x, y \in V)$. 于是(2)中的积分$\le C\delta$. 令$\delta \to 0$即有$f^\epsilon$在$V$上一致收敛于$f$.

□

评分标准：每一问15分.

(1)计算出差商的积分表达式, 4分. 控制收敛定理条件验证, 4分. 偏导数存在且连续(没写连续, 扣1分)导出可微性, 5分. 最后的"类似可得", 2分. 共15分. 注意, 直接写由被积函数一致收敛于导函数而不验证控制收敛定理条件的话, 必须要写明是在被积的那个小球上一致收敛, 这是因为U不是有界集, 只有一致收敛而没用控制收敛定理是不能得出积分收敛的. 如果直接写了$\partial^\alpha f^\epsilon = \partial^\alpha \eta_\epsilon * f$, 至多得6分, 因为原题要我们证明的就是这个. .

(2)证明$|f^\epsilon - f|$能被积分平均控制, 10分. 用Lebesgue微分定理, 5分. 共15分.

(3)f在任一紧子集上一致连续, 5分. 积分式一致趋于0, 10分. 共15分.

3. (25分) 设可积函数$f\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, f^ϵ是f的光滑化函数(定义见试卷第一页).

(1) 证明: 当$\epsilon\to 0+$时, f^ϵ在$\mathbb{R}^n$上一致收敛.

(2) 设(1)中一致收敛的极限函数为$F(x)$, 证明:$F(x)$是$\mathbb{R}^n$中的Lipschitz连续函数. 即存在$L>0$, 使得对于任何$x,y\in\mathbb{R}^n$, 成立

$$|F(x)-F(y)|\le L|x-y|.$$

证明:

(1) 对任意$\epsilon,\delta>0$, 直接计算:

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)-f^\delta(x)| &= \left|\frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(0,\epsilon)}\eta(\frac{y}{\epsilon})f(x-y)dy\frac{1}{\delta^n}\int_{B(0,\delta)}\eta(\frac{y}{\delta})f(x-y)dy\right|\\ &= \left|\int_{B(0,1)}\eta(y)(f(x-\epsilon y)-f(x-\delta y))dy\right|\\ &\le \int_{B(0,1)}|\eta(y)(f(x-\epsilon y)-f(x-\delta y))|dy.\end{aligned}$$

由于$f\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 所以$f\in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 因此在$\mathbb{R}^n$的任一紧子集上, 存在Holder连续函数$f^*=f$ a.e. 代入上式即有

$$|f^\epsilon(x)-f^\delta(x)|\le\int_{B(0,1)}|\eta(y)(f^*(x-\epsilon y)-f^*(x-\delta y))|dy.$$

注意到, 上面的积分式中的被积函数有控制函数$2\|f\|_{L^\infty}\in L^1(B(0,1))$, 那么由控制收敛定理, 就有

$$|f^\epsilon(x)-f^\delta(x)|\to 0\ \ as\ \epsilon,\delta\to 0$$

一致地成立.

(2) 根据三角不等式, 对任意$x\neq y$, 有

$$|F(x)-F(y)|\le|f^\epsilon(x)-F(x)|+|f^\epsilon(y)-F(y)|+|f^\epsilon(x)-f^\epsilon(y)|.$$

因为$f^\epsilon(x)$一致收敛于$F(x)$, 所以$F(x)$是连续函数. 而且, 此时要证F是Lipschitz函数, 只要证明f^ϵ是Lipschitz函数.

对任意$x\neq y$, 有

$$|f^\epsilon(x)-f^\epsilon(y)|=\left|\int_0^1 Df^\epsilon(tx+(1-t)y)\cdot(x-y)dt\right|\le\|Df^\epsilon\|_{L^\infty}|x-y|.$$

而$\|Df^\epsilon\|_{L^\infty}\le\|Df\|_{L^\infty}\|\eta_\epsilon\|_{L^1}=\|Df\|_{L^\infty}$. 所以$\|f^\epsilon(x)-f^\epsilon(y)\|\le\|Df\|_{L^\infty}|x-y|$. 所以$f^\epsilon$是Lipschitz函数, Lipschitz常数是$\|Df\|_{L^\infty}$. 进而$|F(x)-F(y)|\le\|Df\|_{L^\infty}|x-y|$. 证毕.

评分标准: 本题满分25分, 第一问15分, 第二问10分.

(1)第一问算出$|f^\epsilon-f^\delta|$的估计式, 6分. 利用Morrey嵌入把f换成f^*, 4分. 控制收敛定理条件验证, 3分. 得出结论, 2分.

(2)第二问证明$|f^\epsilon(x)-f^\epsilon(y)|\le\|Df^\epsilon\|_{L^\infty}|x-y|$, 3分. $\|Df^\epsilon\|_{L^\infty}\le\|Df\|_{L^\infty}$, 4分. 证明$F$是Lipschitz函数, 3分.

Remark: 第一问**正确验证Ascoli-Arzela引理条件**, 证明存在子列一致收敛, 得7分. 本题不能对f用中值定理. 第一问用了的, 扣12分. 第二问用了的, 扣7分. 第一问**正确证明**a.e.收敛的, 得7分. 因为f不是连续函数, 所以第一问使用第二题(3)的, 扣10-12分. 另外, L^∞函数不能由紧支集光滑函数依L^∞范数逼近. 以及, 用L^1逼近的, 中间有一个积分不能做到收敛(注意被积变量!). 本题不能得出F是光滑函数或可微函数, 因为这需要导数也一致收敛. 因此本题第二问对F用中值定理的, 第二问扣7分. 注意, 中值定理不能直接使用, 因为中值定理只对一维成立, 所以要么使用“有限增量定理”, 要么所取的中值在x,y的连线上(这一点, 数学分析课本上已经明确提出).

4. (20分) 设U是有界连通开集, 边界$\partial U \in C^1$. 假设$1 \le p \le \infty$, 函数$u \in W^{1,p}(U)$

(1) 若$Du = 0$ a.e. in U, 证明: 存在常数C, 使得$u = C$ a.e. in U.

(2) 证明存在仅依赖于n, p, U的正常数C, 使得

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

这里$(u)_U := \frac{1}{|U|}\int_U u(x)dx$.

证明: (1)设$u^\epsilon := \eta_\epsilon * u \in C^\infty(U_\epsilon)$. 则$Du^\epsilon = Du * \eta_\epsilon = 0$, 所以存在常数$C_\epsilon$, 使得$u^\epsilon = C_\epsilon \ \ in \ U_\epsilon$.

又因为$C_\epsilon = \|u^\epsilon\|_p \le \|u\|_p\|\eta_\epsilon\|_1 = \|u\|_p$, 所以$\{C_\epsilon\}$是一致有界数列, 所以存在收敛子列$C_{\epsilon_i} \to C \in \mathbb{R}$. 因为$\|u^\epsilon - u\|_p \to 0, \|C_\epsilon - C\|_p \to 0, u^\epsilon = C_\epsilon$, 所以在$U$的任一紧子集上成立$u = C \ \ a.e.$, 进而结论成立.

(2) 反证法, 假设结论不成立, 那么对任意正整数k, 存在函数$u_k \in W^{1,p}(U)$, 使得

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k\|Du_k\|_{L^p(U)}.$$

令

$$v_k = \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)}}.$$

那么则

$$(v_k)_U = 0, \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \|Dv_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}.$$

所以$\{v_k\}$是$W^{1,p}(U)$中的有界序列, 进而由$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$, 存在子列$v_{k_j}$依$L^p$范数收敛于某个$L^p$函数$v$. 因此, $(v)_U = 0, \|v\|_{L^p(U)} = 1$.

下面证明弱导数Dv**存在**且几乎处处为0. 为此, 对任意$\phi \in C_c^\infty(U)$, 有

$$\int_U v\partial_i\phi dx = \lim_{j\to\infty}\int_U v_{k_j}\partial_i\phi dx = -\lim_{j\to\infty}\int_U \partial_i v_{k_j}\phi dx \le \lim_{j\to\infty}\|Dv_{k_j}\|_p\|\phi\|_{p'} = 0.$$

这样才得出$Dv = 0$ a.e. 从而$v \in W^{1,p}(U)$. 此时再据(1)知, v a.e是常数, 从而必然等于其积分平均值, 所以$v = 0$ a.e., 这和$\|v\|_p = 1$矛盾.

评分标准: 本题共20分, 每小问10分.

(1)第一问证明$u^\epsilon = C_\epsilon$, 4分. 证明$\{C_\epsilon\}$是一致有界数列, 4分. 最后的收敛性argument, 2分. 当然, 这一问可以不取子列, 但一定需要利用u^ϵ几乎处处收敛于u. 如果只写了$u^\epsilon = C$, 扣7分.

(2)反证法, 作归一化后得到$(v_k)_U = 0, \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \|Dv_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}$. 得2分. 紧嵌入得到$L^p$收敛子序列, 3分, 证明$Dv$存在且几乎处处等于0, 3分. 利用(1)导出矛盾, 得2分. 注意, 本题不能由$\|Dv_{k_j}\|_p \to 0$得出$Dv = 0$ a.e., 因为Dv的存在性没有被证明. 即便Dv_{k_j}真的能收敛于某个L^p函数w, 那么也不一定有$w = Dv$ a.e.

(3)此题如果第一问使用第二问的结论, 那么**必须用其它方法绕过第一问, 并正确证明第二问**. 事实上的确有其它方法, 直接将不等式左边p次方, 先用光滑函数逼近, 再用广义Minkowski不等式和中值定理, 最后取极限证明. 考试中, 只有两位同学利用该方法正确地证明了第二问. 如果用第二问证明第一问，但第二问又没有证出来的, 扣17分以上.