# 中国科学技术大学

# 2017年春季学期微分方程II期末试卷

# 参考答案

姓名： 院系： 学号：

2017年6月7日 14:30-16:30

本次考试为闭卷考试，一旦发现作弊，会严肃处理．本试卷共六个大题，满分120分．直接在试卷纸上答题，草稿纸上的答案无效．

**注1**：本试卷中，$U \subseteq \mathbb{R}^n$是边界$C^\infty$的有界开集．称开集$V \subset\subset U$，是指$\bar{V} \subset U$，且$\bar{V}$是$\mathbb{R}^n$中的紧集．

**注2**：$C_1^2(U \times (0,\infty)) := \{u : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R} | u, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u, \partial_t u \in C(U \times (0,\infty))\}$

**注3**：如果解题过程写不下，可以写在试卷反面空白处，并注明你写的位置。

1. (20分) 对任意$u, v \in H_0^1(U)$, 定义双线性型

$$B[u,v] := \int_U Du \cdot Dv + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + cuv \, dx,$$

其中$b^i, c \in L^\infty(U)$.

证明: 存在常数$\alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0$, 使得对任意$u, v \in H_0^1(U)$, 成立不等式:

(1)$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$;

(2)$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$.

**证明**：(1)直接计算可得:

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \int_U |Du||Dv| + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} |u_{x_i}||v| + \|c\|_{L^\infty} |u||v| dx \\
&\leq \|Du\|_{L^2} \|Dv\|_{L^2} + C(\|Du\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}) \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

(2)直接计算可得:

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_U |Du|^2 + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_1} u + cu^2 dx \\
&\geq \int_U |Du|^2 - C(\|Du\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^2) \\
&\geq \int_U |Du|^2 - \epsilon \|Du\|_{L^2}^2 - C(\epsilon) \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

取$\epsilon = \frac{1}{2}$, 可得存在$\beta > 0, \gamma \geq 0$, 使得

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2.$$

**评分标准**：每一问10分。

□

2. (20分) 设$U=(0,1)$.

(1)方程

$$\begin{cases} u''+\lambda u=0 \ \ in\ U \\ \qquad\quad u=0 \ \ on\ \partial U. \end{cases}$$

在$\lambda$取何值时有非零解? 并计算此时的$\lambda$及对应的解$u$.

(2)对于方程

$$\begin{cases} u''+\dfrac{\pi^2}{2}u=x \ \ in\ U \\ \qquad\qquad u=0 \ \ on\ \partial U. \end{cases}$$

证明:该方程的$H_0^1(U)$弱解$u$存在且唯一, 并满足

$$\int_0^1 u^2dx\le\frac{4}{3\pi^4}.$$

**证明：**(1)若$\lambda=0$, 则$u=0$, 不合要求.

若$\lambda<0$, 则$u''+\lambda u=0$推出$u=Ce^{\sqrt{-\lambda}x}$, 这不可能满足边界条件, 除非$C=0$, 仍不合要求.

若$\lambda>0$, 则可以直接解得$u=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$. 代入$u(0)=u(1)=0$可得

$$\lambda_k=(k\pi)^2, u_k=C_k\sin(k\pi x).$$

(2)由第一问可知, 二阶椭圆算子$-\frac{d^2}{dx^2}$在此条件下的特征值为$\{(k\pi)^2\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. 而$\frac{\pi^2}{2}$不是特征值, 据第三存在定理，可得方程

$$\begin{cases} u''+\dfrac{\pi^2}{2}u=x \ \ in\ U \\ \qquad\qquad u=0 \ \ on\ \partial U. \end{cases}$$

存在唯一的$H_0^1$弱解$u$.

下面估计$\int_U u^2dx$. 为此，方程两边同时乘以$u$并积分可得:

$$\int_0^1 uu''dx+\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 u^2dx=\int_0^1 xu\,dx.$$

分部积分可得:

$$\int_0^1(u')^2dx=\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 u^2dx-\int_0^1 xu\,dx.$$

据主特征值变分原理可得:

$$\lambda_1=\pi^2=\inf_{u\in H_0^1,u\neq 0}\frac{\|Du\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}.$$

这说明$\int_0^1(u')^2dx\ge\pi^2\int_0^1 u^2dx$.

于是

$$\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 u^2dx\le-\int_0^1 xu\,dx\le\|x\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\Rightarrow\int_0^1 u^2dx\le\frac{4}{3\pi^4}.$$

□

**评分标准：**每一问10分. 第一问: $\lambda=0,\lambda<0$每种情况各2分, 或者直接说明$-\frac{d^2}{dx^2}$的特征值非负. $\lambda>0$的情况6分. 第二问: 证明弱解存在唯一, 得3分. 想到主特征值变分原理并解决问题, 7分. 第二问可以直接把方程解出来并估计, 正确计算的, 不扣分.

3. (20分) 设$U$是有界连通开集, 称$u\in H^1(U)$是如下Neumann边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ in\, U \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ on\, \partial U \end{cases}$$

的弱解，是指对任意$v\in H^1(U)$成立

$$\int_U Du\cdot Dvdx = \int_U fvdx.$$

现设$f\in L^2(U)$. 证明:上述方程弱解存在当且仅当$\int_U fdx = 0$.

**证明：**

$(\Rightarrow)$ : 令$v=1$即可.

$(\Leftarrow)$ : 令

$$B[u,v] = \int_U Du\cdot Dvdx,\ \ H^1_\sigma(U) := \{u\in H^1(U)|\int_U udx = 0\}.$$

**Step 1:** $H^1_\sigma(U)$是Hilbert空间, 内积为$B[\cdot,\cdot]$.

事实上, $H^1(U)$上的连续线性泛函$l: H^1(U)\to\mathbb{R},\ \ l(u) := \int_U udx$ 满足$H^1_\sigma(U) = l^{-1}(0)$, 这是$H^1(U)$中的闭集. 从而$H^1_\sigma(U)$是$H^1(U)$的闭子空间(闭集在连续映射下的原像是闭集), 进而是Hilbert空间.

$B[\cdot,\cdot]$的双线性是显然的. 下面只要证明$B[u,u]=0$当且仅当$u=0\ in\ H^1_\sigma$. 事实上由连通集的Poincare不等式即有$\|u-<u>_U\|_{L^2}\le\|Du\|_{L^2} = \sqrt{B[u,u]} = 0$, 而$<u>_U = 0$, 这就证明了第一步.

**Step 2:** 据Riesz表示定理, 对任意$f\in L^2(U)$ with $\int_U f = 0$, 存在唯一的$u_f\in H^1_\sigma(U)$, 使得对任意$v\in H^1_\sigma(U)$, 成立

$$\int_U Du_f\cdot Dvdx = B[u_f,v] = (f,v).$$

**Step 3:** 对任意的$v\in H^1(U)$, 我们知道$v-<v>_U\in H^1_\sigma(U)$. 于是由Step 2, 给定$f\in L^2$, 存在唯一的$u_f\in H^1_\sigma\subset H^1$, 满足

$$(f, v-<v>_U) = \int_U Du_f\cdot D(v-<v>_U)dx.$$

又因为$\int_U f = 0$, 所以上式左边$=(f,v)$. 这样我们就证明了结论.

**评分标准:** 左边推右边, 5分. 后面每个Step各5分. 用Fredholm二择一只能得出左边推右边，正确证明的得5分，否则得零分。

$\square$

4. (20分) 设

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \ \ in\ L^2(0,T;H_0^1(U)), \\ \mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} \ \ in\ L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases}$$

证明:$\mathbf{u}' = \mathbf{v} \ \ in\ L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

**证明：**我们断言：

**Claim:** 对任意$\phi \in C_c^\infty(0,T), w \in H_0^1(U)$, 成立:

$$\left\langle \int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt, w \right\rangle = \left\langle -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt, w \right\rangle,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$代表$H^{-1}(U), H_0^1(U)$中元素之间的作用(pairing).

若Claim获证，那么在$H^{-1}(U)$中(即作为$H_0^1(U)$上的连续线性泛函)成立:

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt.$$

再由时间弱导数定义知

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \mathbf{u}'(t)\phi(t)dt.$$

这样就有$\mathbf{u}' = \mathbf{v} \ \ in\ L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

Claim的证明仍然由直接计算可得: 注意到$t \mapsto \pi(t)w \in L^2(0,T;H_0^1)$, 那么:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt, w \right\rangle &= \int_0^T \langle \phi'(t)\mathbf{u}(t), w\rangle\, dt \\
&= \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \phi'(t)w\rangle\, dt \\
(\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \ \ in\ L^2(0,T;H_0^1(U))) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k(t), \phi'(t)w\rangle\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k(t)\phi'(t), w\rangle\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle \int_0^T \mathbf{u}_k(t)\phi'(t)dt, w \right\rangle \\
&= -\lim_{k\to\infty} \left\langle \int_0^T \mathbf{u}_k'(t)\phi(t)dt, w \right\rangle \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}_k'(t)\phi(t), w\rangle\, dt \\
(\mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} \ \ in\ L^2(0,T;H^{-1}(U))) &= -\int_0^T \langle \mathbf{v}(t), \phi(t)w\rangle\, dt \\
&= \left\langle -\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)dt, w \right\rangle
\end{aligned}$$

**注：**断言的证明占15分. 要注意到$\mathbf{u}' = \mathbf{v}$的定义是$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \mathbf{u}'(t)\phi(t)dt$. 写错定义或者写错要证内容的, 扣15分以上. Claim证明之后的论述占5分.

Claim的证明中，两次取弱极限各5分，分部积分那一步占5分。如果没有出现时间积分与空间积分交换但其它过程正确，扣3分。

□

5. (15分) 设具有紧支集的函数$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^6(\mathbb{R}^n)$是半线性方程

$$-\Delta u + u^3 = f \ \ in\, \mathbb{R}^n$$

的弱解, 其中$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明:$u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

**证明一：**设$U$是有界开集，边界光滑，$Spt(u) \subset U$. 由于$f - u^3 \in L^2(U)$, 由椭圆方程正则性定理即有$u \in H^2$.

**证明二：**由弱解定义知:对任意$v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 成立:

$$\int Du \cdot Dv + u^3 v \, dx = \int fv \, dx.$$

设$0 < |h| << 1$, 令$v = -D_k^{-h} D_k^h u$, 则据$u \in H^1$且紧支可得$v \in H^1$, 代入上式可得:

$$-\int (Du \cdot DD_k^{-h} D_k^h u + u^3 D_k^{-h} D_k^h u) \, dx = -\int f D_k^{-h} D_k^h u \, dx.$$

首先:

$$-\int Du \cdot DD_k^{-h} D_k^h u dx = -\int Du \cdot D_k^{-h} D_k^h Du dx = \int |D_k^h Du|^2 dx.$$

其次:

$$\begin{aligned}
-\int u^3 D_k^{-h} D_k^h u \, dx = \int D_k^h(u^3) D_k^h u dx &= \int \frac{u^3(x+he_k) - u^3(x)}{h} \cdot \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h} dx \\
&= \int \frac{u^3(x+he_k) - u^3(x)}{u(x+he_k) - u(x)} \cdot \left(\frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}\right)^2 dx \\
(\text{中值定理}) &= 3u^2(\zeta) \|D_k^h u\|_{L^2}^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

这样的话,

$$\int |D_k^h Du|^2 dx \leq \int fv dx \leq \frac{1}{2}\int f^2 + \frac{1}{2}\int v^2 \leq \frac{1}{2}\int f^2 + \frac{1}{2}\int |DD_k^h u|^2 dx.$$

也就是

$$\int |D_k^h Du|^2 dx \leq \int f^2.$$

所以

$$\|D^2 u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} < \infty.$$

□

**评分标准：**

1. 正则性定理使用正确，得15分；使用错误，扣9分以上；

2. 不能通过证明$\Delta u \in L^2$来证明$|D^2 u\|_{L^2} < \infty$. 因为这依赖于分部积分, 而$H^2$函数不能分部积分. 另外, 有同学用紧支集光滑函数逼近, 但只能做到$H^1 \cap L^6$的逼近, 无法做到二阶导逼近. 对紧支光滑函数证到结论的, 得7-9分.

3. 方法2: 弱解定义, 3分. 对$\int Du \cdot Dv$的化简, 3分. $u^3 v$的估计, 3分. 右边的估计, 3分. 最后差商的估计, 3分. 其它方法也可，因为可以用$u$的$L^6$, $Du$的$L^2$控制.

6. (25分) 考虑热方程:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \;\; in\, U \times (0,\infty), \\ \qquad\quad u = 0 \;\; on\, \partial U \times [0,\infty), \end{cases}$$

(1)设$u_1(x,t), u_2(x,t) \in C_1^2(U\times(0,\infty)) \cap C(\bar{U}\times[0,\infty))$是上述热方程的解, 初值分别为

$$u_1(x,0) := g_1(x) \in C^1(\bar{U}),\; u_2(x,0) := g_2(x) \in C^1(\bar{U}).$$

设$g_1(x) \le g_2(x)$对任意$x \in U$成立, 证明:

$$u_1(x,t) \le u_2(x,t) \;\; (\forall t \ge 0, x \in U).$$

(2)设$u(x,t) \in C_1^2(U\times(0,\infty)) \cap C(\bar{U}\times[0,\infty))$是上述热方程的解, 初值为$u(x,0) := u_0(x) \in C^1(\bar{U})$. 证明:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(U)} = 0.$$

(3)在(2)的条件下, 证明: 对任意$x \in U$, 一致地成立:

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t)| = 0.$$

**证明：**(1)令$v = u_1 - u_2$, 则$v(0) = g_1 - g_2 \le 0$. $v$满足

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 \;\; in\, U \times (0,\infty), \\ \qquad\quad v = 0 \;\; on\, \partial U \times [0,\infty), \\ v = g_1 - g_2 \le 0 \;\; on\, U \times \{t=0\}. \end{cases}$$

据弱极大值原理，对任意$T > 0$, 在$\bar{U_T}$上显然有$v(x,t) \le 0$. 由$T$任意性即得结论.

(2)方程两边乘以$u$, 对$x$变量积分可得:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \int_U u\Delta u dx = 0.$$

分部积分可得

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = -\|Du(t)\|_{L^2}^2.$$

据主特征值变分原理知$\lambda_1 = \pi^2 = \inf_{u\in H_0^1, u\ne 0} \frac{\|Du\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} > 0$, 所以$\|Du\|_{L^2}^2 \ge \lambda\|u\|_{L^2}^2$, 这就说明

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 \le -\lambda_1\|u(t)\|_{L^2}^2.$$

由Gronwall 不等式即得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \le e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2} \to 0 \;\; as\; t \to 0.$$

(3) 设$\lambda_1 > 0$是$-\Delta$(零边值问题)的主特征值, $0 < w_1 \in C^\infty(\bar{U})$是对应的特征函数.

注意到, $u_s(x,t) := se^{-\lambda_1 t}w_1(x)$是原方程以初值$u_{s,0}(x) = sw_1(x)$演化时的解.

而对任一给定的初值$u_0 \in C^1(\bar{U})$, 存在实数$s, r$使得对任意$x \in U$, 成立

$$sw_1(x) \le u_0(x) \le rw_1(x).$$

再由第一问(比较原理)知,

$$se^{-\lambda_1 t}w_1(x) \le u(x,t) \le re^{-\lambda_1 t}w_1(x).$$

证毕.

**评分标准：**第一问10分，其中得出方程3分，极大值原理7分。第二问6分, 得到$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2$得2分, 主特征值变分原理2分, Gronwall不等式2分。第三问9分，“注意到”2分；对初值的估计，6分；用第一问，1分。第三问用Harnack不等式（然而大家都用错了，而且证不出来），得4分；用特征函数系展开，得4分（因为有一个级数的绝对收敛证不出来）。其它用反证法和一致连续的做法的全是错的，得分在2分以下。