微分方程II期中考试供题

1. 设$1 \le p < \infty$, U是$\mathbb{R}^d$中的开集, $U_\epsilon := \{x \in U | dist(x, \partial U) > \epsilon\}$. 设$f \in W^{1,p}_{loc}(U)$, $f^\epsilon := f * \eta_\epsilon$. 请严格证明:$\partial_i f^\epsilon = \eta_\epsilon * \partial_i f$, $1 \le i \le d$.

(此题为这门课一直要用的结论.)

2. 设$1 \le p < \infty$, U是$\mathbb{R}^d$中的开集, $f, g \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$, 请严格证明:$fg \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$, 且弱导数$\partial_i(fg) = \partial_i(f)g + \partial_i(g)f$, $1 \le i \le d$ a.e.成立.

(Leibniz Rule成立的一个充分条件.)

3. 设$1 \le p < \infty$, U是$\mathbb{R}^d$中的开集, $f \in W^{1,p}(U), F \in C^1(\mathbb{R}), F' \in L^\infty(\mathbb{R}), F(0) = 0$, 请严格证明:$F(f) \in W^{1,p}(U)$, 且弱导数$\partial_i(F(f)) = F'(f)\partial_i(f)$ a.e.成立. $1 \le i \le d$.

(习题17的U有界条件去掉, 换成$F(0) = 0$也可以成立.)

4. 设$f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d), f^\epsilon := f * \eta_\epsilon$. 请严格证明:当$\epsilon \to 0$时, f^ϵ一致收敛于f.

(证明$W^{1,\infty}$等价于Lipschitzian的过程中，书上出现严重跳步的一处。)

5. 设$1 \le p < \infty$, U是$\mathbb{R}^d$中的有界开集, $\partial U \in C^1$. 根据迹定理, 存在有界线性算子

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U; d\mathcal{L}^{d-1}),$$

使得对任何$f \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$成立$Tf = f|_{\partial U}$.

请严格证明:对任何$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d).f \in W^{1,p}(U)$, 成立等式:

$$\int_U f \mathrm{div}\phi \,\mathrm{dx} = -\int_U Df \cdot \phi \,\mathrm{dx} + \int_{\partial U} (\phi \cdot \nu) Tf \,\mathrm{d}\mathcal{L}^{d-1}.$$

这里$\mathcal{L}^{d-1}$是指$d-1$维Lebesgue测度(因∂U是$d-1$维的, 所以∂U上的测度必须要取成$\mathcal{L}^{d-1}$).

(分部积分公式的推广)

6. 设$1 \le p < d, f \ge 0, f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d), Df \in L^p(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$, 其中$p^* = \frac{dp}{d-p}$. 再设$\zeta$是具有紧支集的光滑函数, 满足$0 \le \zeta \le 1$, 在闭球$B(0,1)$内$\zeta = 1$, 且$Spt(\zeta) \subseteq B(0,2), |D\zeta| \le 2$.

(1)令$f_k(x) = f(x)\zeta(x/k)$, 证明:$f_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $\|f_k - f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \to 0$, $\|Df_k - Df\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ as $k \to +\infty$.

(2)证明:$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C\|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. 并说明$C$仅和$p, d$有关.

(对这类函数, 可以引入"Capacity".)

7. 设U是$\mathbb{R}^d$中的有界开集.

(1)设一列函数$\{v_n\} \subset H^1_0(U), \|v_n\|_{H^1_0(U)} = 1$, 证明: 存在$\{v_n\}$的子列$\{v_{n_k}\}$和$H^1_0(U)$中的函数$v$, 使得

$$\|v_n - v\|_{H^{-1}(U)} \to 0.$$

(2)设$v \in H^1_0(U), \|v\|_{H^1_0(U)} = 1$. 证明:$v \in H^{-1}(U)$, 且对于任意$\epsilon > 0$, 存在正常数$C(\epsilon)$, 使得

$$\|v\|_{L^2(U)} \le \epsilon + C(\epsilon)\|v\|_{H^{-1}(U)}.$$

(Hint: 反证法, 并利用(1).)

(张恭庆《泛函分析讲义（上册）》习题4.1.11, 并注意到$H^1_0(U) \subset\subset L^2(U) \subset H^{-1}(U)$.)

8. 设$1 < p < \infty$.

(1) 设U是$\mathbb{R}^d$中的有界开集, 且$\partial U \in C^1$, 证明:紧嵌入$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$成立.

(2) 设$f \in W^{1,p}(\mathbb{R}), f_n(x) := f(x+n)$. 证明:$f_n$在$L^p(\mathbb{R})$中弱收敛于0, 但$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$. 这说明把$U$换成全空间, 嵌入没有紧性.

(紧嵌入需要有界集)

9. 设$U = B^0(0,1) \subset \mathbb{R}^d, d > 1$, 证明:$u = \log\log(1+\frac{1}{|x|}) \in W^{1,d}(U)$但并不属于$L^\infty(U)$.

(Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式在临界指标不成立. 习题14.)