2016 年复分析（H）期中试题

整理：　张桐*

1、（24 分）计算下列积分。

（1）

$$\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{z-1}$$

（2）

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)^2(z^4-1)}$$

（3）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}dx$$

2、（40 分）判断下列说法是否正确，说明理由。

（1）全纯函数一定有原函数；

（2）调和函数 $log|z|$ 没有共轭调和函数；

（3）设 f 在 $|z|<2$ 中全纯，且

$$\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(n+1)z-1}dz=0$$

对任意 $n\in N$ 成立，则 f 恒等于零；

（4）不存在 D 上的全纯函数 f，使得对任意 $z\in D$，都有 $f(z)=e^{|z|}$；

（5）方程 $2z^4=sinz$ 在 $|z|<1$ 中只有一个根；

3、（12 分）

设 f 在以 z_0 为圆心，r 为半径的圆盘 D 中全纯，若 $f(D)$ 包含在一个半径为 s 的圆盘中，证明：

$$|f'(z_0)|\le\frac{s}{r}$$

。

4、（12 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ 的收敛半径为 R，证明：当 $0<r<R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}$$

5、（12 分）

设 f,g 为单位闭圆盘 $\{z\in C||z|\le 1\}$ 上的全纯函数，且在 $|z|=1$ 上满足：

$$|f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

（1）证明：对任意非负实数 λ，$f-\lambda g$ 与 f 在单位圆周内的零点个数相同；

（2）证明：f,g 在单位圆周内的零点个数相同。

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn　　phone:18856017324