2016 年复分析（H）期末试题

整理：　张桐*

1、（30 分）判断下列说法是否正确，说明理由。

（1）$f(z)=\frac{1}{z}$ 在其定义域中可以被多项式一致逼近；

（2）存在全纯映射 $f:D\to D$，使得对任意 $n=2,3,...$，都有 $f(\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n-1})=\frac{1}{n}$；

（3）方程 $z^4+z^3+4z-1=0$ 在 $1<|z|<3$ 中有两个根；

（4）设 f 为整函数且 $Re(f)<0$，则 f 为常数；

（5）设 f 为增长阶数有限的整函数，如果存在复数 a,b，使得对任意的 $z\in C$，都有 $f(z)\neq a$，$f(z)\neq b$，则 f 为常数；

2、（20 分）计算下列积分。

（1）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cosx}{a^2+x^2}dx, where\ a>0;$$

（2）

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|a-e^{i\theta}|d\theta, where\ a\in C;$$

3、（16 分）

（1）设 D 是由一条分段光滑的闭曲线 γ 围成的区域，f,g 为 $\bar{D}$ 上的全纯函数。设 f 在边界 γ 上没有零点，且 f 在 D 中的所有不同的零点为 $z_1,z_2,...,z_n$，其相应的阶数为 $k_1,k_2,...k_n$，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}k_jg(z_j)$$

（2）计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}z^2\frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz$$

其中，

$$f(z)=\frac{sinz}{3z^3-z+1}$$

4、（12 分）

设函数 $f(z)$ 在有界域 D 内全纯，在闭域 D 上连续，并且 $f(z)\neq 0$。证明，如果在 D 的边界上，$|f(z)|=M$，则 $f(z)=Me^{i\theta}$，其中 $\theta\in R$。

5、（12 分）

构造一个共形映射将区域 $\{z:|z|>1\}\backslash(-\infty,-1]$ 映为单位圆盘。

6、（10 分）

设 $f:D\to D$ 为全纯函数，且存在 $a,b\in D,a\neq b$，满足 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$|f(z)|\leq|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}||\frac{z-b}{1-\bar{b}z}|$$

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn　　phone:18856017324