概率论期末试题　2016 年 6 月 24 日

整理：　张桐*

1、（15 分）设 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{2x}{y}e^{-y-\frac{x^2}{y}},0<x,y<\infty,$$

求条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 与条件期望 $E(X|Y)$。

2、（15 分）设 X_1 和 X_2 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)),|x|\leq 1,|y|\leq 1,$$

令 $X=X_1+X_2$，记 X,X_1,X_2 的特征函数分别为 $\phi(t)$，$\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$。证明：

$$\phi(t)=\phi_1(t)\phi_2(t),$$

但 X_1 和 X_2 不独立。

3、（15 分）设 $X_n\xrightarrow{d}X$，当 X 为常数 c 时，证明：$X_n\xrightarrow{P}X$。若 X 不为常数，举例说明结论一般不成立。

4、（15 分）设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量列，且 $P(X_k=-\sqrt{k})=P(X_k=\sqrt{k})=\frac{1}{2}$，试选择适当序列 B_n 并通过验证 $Lindeberg$ 条件说明 $\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{D}N(0,1)$。

5、（15 分）设 X 和 Y 为独立同分布的随机变量，且 $Var(X)=1$。试证：

$$"\forall a,b\in R,aX+bY\xrightarrow{D}\sqrt{a^2+b^2}X"\Longleftrightarrow"X\sim N(0,1)".$$

6、（10 分）设 X_k 为独立同分布的随机变量列，且均值存在。若 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-v)$ 依分布收敛到某随机变量 Z，试证 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{a.s.}v$。

7、（15 分）设 (X,Y) 服从标准二元正态分布，其相关系数 $\rho(X,Y)=r\in(-1,1)$。记 $\phi(x)$ 为标准正态分布的密度函数。

（1）对 $n\geq 0$，定义如下函数列 $H_n(x):H_0=1,(-1)^nH_n\phi=\phi^n$。证明：$H_n(x)$ 是主项为 x^n 的 n 次多项式，且满足正交关系：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)\phi(x)dx=n!I_{\{m=n\}}$$

（2）对 $m,n\geq 1$，试计算相关系数 $\rho(H_m(X),H_n(Y))$。

（3）设 $P(x),Q(y)$ 为非常数多项式，试证：$|\rho(P(X),Q(Y))|\leq\rho(X,Y)$。

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn　phone:18856017324