2016年秋季学期数学分析(A3)期末考试

主讲教师: 李思敏

2017年元月10日 8:30-10:30

一、判断敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$, $x \geq 0$ 敛散性；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$的条件收敛和绝对收敛性；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \geq 0$的一致收敛性；

(4) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{1/n}$敛散性；

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$敛散性。

二、用幂级数计算$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$.

三、设$a > -1$, 计算积分$\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\, dx$.

四、求$\phi(u) := \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^u}\, dx$的定义域，并讨论其连续性。

五、在$[-\pi, \pi]$上把$f(x) = 1-2x^2$展开成傅立叶级数，并计算$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

六、用傅立叶积分公式证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u\pi \sin ux}{1-u^2} du = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

七、设$f(x) \in C^1[0,\infty)$且单调递减区域0。证明：

(1) 若$\int_0^{\infty} f(x)dx$收敛，则$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

(2) 求证：$\int_0^{\infty} f(x)dx$收敛，当且仅当$\int_0^{\infty} xf'(x)dx$收敛。

八、设$\{f_n(x)\}$是一列关于$x \in [0,1]$单调递增的函数，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [0,1]$, 且$f(x)$连续。证明上述收敛是一致收敛。