中国科学技术大学期末试卷

2013—2014 学年第 2 学期 A卷

课程名称：复分析

学生姓名：________ 学　　号：________

专　　业：________ 年级/班级：________

一、(20分)判断下面命题是否正确，并详细说明理由或举出反例（理由不充分或不给出理由者不得分）。

1. 对任何$z \in \mathbb{C}$, $|\sin(z)| \le 1$.

2. 若 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的任意区域, 函数$f(z)$在Ω 中全纯，则对Ω 中的任意可求长简单闭曲线γ有
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

3. 若 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的任意区域，若全纯函数 $f(z)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上$|f(z)| \le 1$，则 $\forall z \in \Omega$ 有$|f(z)| \le 1$.

4. 若幂级数 $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n z^n$ 在其收敛圆周$|z| = R(< +\infty)$上某点z_0 处收敛，则z_0 为该幂级数的正则点(即$f(z)$可以在z_0 附近全纯开拓到收敛圆周外面)。

二、(30分) 计算题：

1. 计算积分
$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$
其中γ 为可求长简单闭曲线，且$a, b \notin \gamma$.

2. 利用留数定理计算实积分：
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{16+x^2}.$$

3. 计算函数
$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$
分别在下面区域上的Laurent级数：
$$|z|<1, \quad 2<|z|<+\infty.$$

三、(10分)若$f(z)$ 是整函数，且满足

$$f(z+i)=f(z)=f(z+1),\quad \forall z\in\mathbb{C},$$

则$f(z)$ 为常数。

四、(10分)设 $n\in\mathbb{N}$. 求 e^z-4z^n+1 在单位圆盘中零点的个数。

五、(10分)设$\mathbb{D}=\{|z|<1\}$. 若 $f(z)$ 在$\mathbb{D}$上全纯，且在$\mathbb{D}$中的全部零点为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(零点按照其重数重复计算). 若对任意$z\in\mathbb{D}$ 有$|f(z)|\le M$ ，则

$$|f(z)|\le M\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\right|,\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

六、(10分)作一共形映射把扇形区域$\{z\,|\,0<arg\,z<\alpha(<2\pi)\}$ 映为单位圆盘。

下面两道题选做一道：(10分)

七、若幂级数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的和函数在其收敛圆周上有唯一奇点z_0(即可全纯开拓到$\{|z|<R_1\}\backslash\{z_0\}(|z_0|<R_1)$), 且$z_0$ 是和函数$f(z)$的$k(k\in\mathbb{N})$阶极点, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0.$$

七、 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ 上的全纯函数，在 $\bar{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$ 上连续，并且满足

(1) $\lim_{z\to1}\frac{|f(z)|}{\log|z-1|}=0$;

(2) 对于 $w\in\partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$, $|f(w)|\le1$.

求证

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\le1.$$