2013年春季学期微分方程2(H)期末考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn

主讲教师: 梁兴

注：本试卷共5题，总分100分。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

1. (25分) 设u是下述方程的光滑解

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \in C^\infty[0,1]. \end{cases}$$

证明：

(1) $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2[0,1]} = 0$,

(2) $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty[0,1]}$关于$t$单调递减,

(3) $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty[0,1]} = 0$.

2. (25分) 设u^i $(i = 1,2)$分别是如下方程初值g取成$g^i \in C^\infty[0,1]$时对应的光滑解

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = u(1-u) & x \in (0,1),\ t > 0 \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \in C^\infty[0,1]. \end{cases}$$

证明：

(1) 若对任意$x \in [0,1]$有$g^1(x) - g^2(x) \le 0$, 则$\forall (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$有$u^1(x,t) < u^2(x,t)$.

(2) 若$g(x)$恒大于0，则$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1$对$x \in [0,1]$一致成立。（提示：先考虑不含空间变量的解）

(3) 若$g(x)$为非负函数，且存在$x_0 \in (0,1)$使得$g(x_0) > 0$, 则$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1$对$x \in [0,1]$一致成立。

3. (20分) 设$f \in L^2(U)$, 其中U为$\mathbb{R}^n$中边界光滑的有界开集，$\{w_k\}$为$L^2(U)$和$H_0^1(U)$的标准正交集。设$u_m = \sum_{k=1}^m a_m^k w_k$为积分方程

$$\int_U Du_m \cdot Dw_k \, dx = \int_U f \cdot w_k \, dx, \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

的解。证明：存在$\{u_m\}$的子列在$H_0^1(U)$中弱收敛，其弱极限u是如下方程的弱解:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \ U \\ u = 0 & on\ \ \partial U. \end{cases}$$

4. (10分) 设$c > 0$, 求解如下波方程的初边值问题:

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = \cos(\pi x)\sin(\omega t) & x \in (0,1),\ t > 0 \\
\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0 & t > 0 \\
u(x,0) = 0, \partial_t u(x) = 0.
\end{cases}
$$

5. (20分) 设$\mathbb{D}$为二维欧氏空间中的单位开圆盘，$u \in H^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$满足$\Delta u \le 0$ a.e. in $\mathbb{D}$. 证明: $u(x) \ge 0$ in $\mathbb{D}$.