概率论期末试题 2014年1月5日

[redacted] 分数: 84

15 1. (15分) 设(X, Y)的联合密度为

$$f(x,y) = C(x-y)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right], \qquad -\infty < x, y < \infty,$$

试求常数C、边缘密度$f_X(x)$及条件期望$E(Y|X)$.

8 2. (10分) 若X, Y为相互独立且参数均为1的指数随机变量，试求

(1) $U = X + Y, V = X/(X+Y)$的联合密度函数;

(2) $W = \sin^{-1} V$的密度函数。

8 3. (10分) 若$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，均服从$N(0,1)$，记

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \qquad Y_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

证明Y_1与Y_2独立当且仅当$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

9 4. (10分) 设G_1与G_2为某两个随机变量的母函数，$0 \le \alpha \le 1$. 证明$G_1 G_2$与$\alpha G_1 + (1-\alpha) G_2$均为概率母函数。

10 5. (10分) 设$X_1, X_2, \ldots, X_{12}$为相互独立的随机变量，且均服从$(0,1)$上均匀分布，利用中心极限定理求$P(\sum_{k=1}^{12} X_k > 6)$的近似值。

15 6. (15分) 设随机变量列$\{X_n\}$依分布收敛到X. 若X为常数c, 证明$\{X_n\}$依概率收敛到c. 若X不为常数，举例说明结论一般不成立。

0. 7. (15分) 设X服从密度为$f(x) = x^{s-1}e^{-x}/\Gamma(s)$ $(x \ge 0)$的Γ 分布，这里s为正整数。给定$X = x$时随机变量Y服从参数为x的Poisson分布，试求Y 的特征函数，并证明当$s \to \infty$时

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

依分布收敛到$N(0,1)$.

9 8. (15分) 设$X_1, X_2, \ldots$为相互独立且服从相同分布的随机变量，且满足$E(X_1) = 0$和$E(X_1^4) < \infty$. 记$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 证明

(1) 任给$\epsilon > 0$, 存在常数C使$P(|S_n| > n\epsilon) \le \frac{C}{n^2}$;

(2) 当$n \to \infty$时有$n^{-1} S_n \xrightarrow{a.s.} 0$.

10 9. (附加题，10分) 设随机变量U, Y, Z相互独立，U服从上$[0,1]$均匀分布。若$X = U(Y+Z)$, 问X, Y, Z是否可能具有相同的分布？若是，请举例（$X = Y = Z = 0$情形除外）；若不是，请说明。