整理者注：

（1）这一年的主讲教师是宣本金老师和宁吴庆老师。

（2）教材疑似是Evans的PDE第2、4章，因为内容比较契合，2、3、5题甚至书上能找到原样的内容。

（3）题目对初学者/不熟悉理论的同学可能会很难，不要丧失信心。

学生所在院系：________

学号：________

装订线，答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2012–2013 学年第一学期

微分方程 (I) 期末考试试题　A

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
复评人						

得分	评阅人

一 (本题共 20 分) 考察下列一阶偏微分方程的初值问题:

1). 求出初值问题 $\begin{cases} u_t + u_x = 0, \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$ 的解 $u(x,t)$；

2). 在同一坐标系内，画出函数 $\varphi = \sin x$ 以及 1) 中解 $u(x,t)$ 在 $t=2$ 时刻的图像;

3). 求出初值问题 $\begin{cases} v_t + v_x = \sin(x+t), \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $v(x,t)$.

得分	评阅人

二 (本题共 20 分) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，函数 $u \in C^2(U)$，且在 U 内满足方程：$\Delta u = 0$.

1). 试证明平均值公式，即，$u(x) = \dfrac{1}{\alpha(n) r^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S_y$，$\forall\, B(x,r) \subset U$，其中 $\alpha(n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积；

2). 试证明强极值原理，即设 U 为连通有界开集，且存在一点 $x_0 \in U$，使得 $u(x_0) = \max\limits_{\bar{U}} u$，则 $u(x)$ 在 U 内恒为常数；

3). 试证明边值问题 $\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ in } U, \\ u|_{\partial U} = g \end{cases}$ 解的唯一性，其中 $g \in C(\partial U)$，$f \in C(U)$.

$-\Delta u_1 = f$ in U

Evans第二章原文

得分	评阅人

三（本题共 20 分）已知平面上拉普拉斯方程的基本解为

$$\Phi(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

1) 求出区域 $U=\{y>x\}$ 的格林函数 $G(M_0,M_1)$，$M_0=(x,y),M_1=(\xi,\eta)\in U$，$M_0\neq M_1$；

2) 设 ν 为区域 U 在边界上的单位外法向量，计算 $\left.\frac{\partial G(M_0,M_1)}{\partial\nu}\right|_{M_1\in\partial U}$；

3) 构造出拉普拉斯方程边值问题 $\begin{cases}-\Delta u=0,\ \text{in } U\\ u|_{\partial U}=g\end{cases}$ 的解.

模仿Evans第二章

得分	评阅人

四 (本题共 15 分) 考察边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ (x,t) \in [0,\ 1] \times \mathbb{R}_+, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{x\pi}{2}, u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

1) 求出上述定解问题的解 $u(x,t)$；

2) 求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^1 [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)] \mathrm{d}x$.

第一问可以分离变量，第二问可以考虑方程两边乘以u_t然后分部积分

得分	评阅人

五 (本题共 25 分) 考察热传导方程: $u_t - \Delta u = 0,\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

1) 证明: 若 $u(x,t)$ 为热传导方程的解, 则对任意非零常数 λ, 函数 $u(\lambda x,\ \lambda^2 t)$ 也为热传导方程的解;

2) 试求出热传导方程的所有形如 $u(x,t) = v(\frac{|x|^2}{t})$ 的解;

3) 选取 2) 中的一个解 $\Phi(x,t) = u(x,t)$, 使得对任意 $t > 0$, 都有 $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$;

4) 构造出热传导方程初值问题 $\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t),\ \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = 0,\ \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$ 的解.

直接计算即可